АНАЛІЗ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПРОЦЕСІВ В ЕЛЕКТРИЧНОМУ КОЛІ ПРИ ПЕРІОДИЧНО ЗМІННОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Перетятко Ю.В., к.т.н., доц., Слободян Л.Р., к.т.н., доц.
НТУУ «КПІ», кафедра теоретичної електротехніки
Тімченко О.Б., студент
НТУУ «КПІ», кафедра автоматизації управління електротехнічними комплексами

Вступ. Розрахунок динамічних процесів у електричних колах при постійній зміні параметрів завжди є досить складною задачею, оскільки ці процеси описуються диференційними рівняннями із змінними у часі параметрами. У роботах таких видатних вчених як Пухов Г.Е., Левінштейн М.Л., Zadeh I.A. [1, 2, 3] представлені різні методи та підходи до вирішення цих задач.

Постановка задачі. Довести, що для аналізу динамічних процесів у електричних колах з періодично змінними параметрами найбільш доцільним є використання операторного методу на основі перетворення Лапласа.

Матеріали і результати досліджень. Згідно теорії електричних кіл, перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{1}$$

узагальнює підхід до аналізу електромагнітних процесів при різних законах зміни параметрів схеми. Використання перетворення Лапласа для аналізу процесів при зміні параметрів схеми за лінійним та експоненціальним законах подано у роботах [4, 5]. Розглянемо випадок реального активного навантаження $R_н(t)$, яке замінюється періодично за законом (2):

$$R_н(t) = R_{сп}^{\min} + \rho \cdot \cos(\omega_0 t), \tag{2}$$

де $R_{сп}^{\min}$ та ρ – активний опір навантаження.

Цьому режиму відповідає процес циклічного “заряду-розряду” батареї конденсаторів.

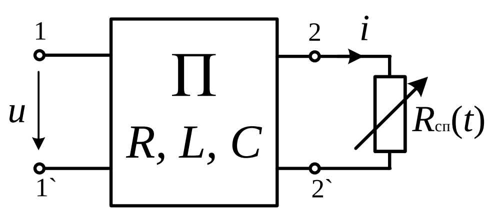

Рисунок 1 – Схема заміщення підмикання змінного опору

Рівняння електромагнітного процесу у поданому колі має наступний вигляд:

$$L\cdot\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i(t)\cdot dt+R\cdot i(t)+\left(R_{\text{сп}}^{\min}+\rho\cdot\cos\left(\omega_0 t\right)\right)\cdot i(t)=u(t). \qquad (3)$$

Вхідна напруга при цьому може бути як постійною U, так і синусоїдною $u(t)=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$.

Для розв’язку рівняння (3) використаємо перетворення Лапласа (1). З урахуванням ненульових початкових умов для струму у колі та напруг на індуктивності і конденсаторі можна записати:

$i(t)\fallingdotseq J(p)$;

$u(t)\fallingdotseq U\left(p\right)$;

$L\dfrac{di}{dt}\fallingdotseq\left[p\cdot J(p)-i(0)\right]\cdot L$;

$\dfrac{1}{C}\int i(t)\cdot dt\fallingdotseq\dfrac{J(p)}{pC}+\dfrac{U_C(0)}{p}$.

Для знаходження відображення функції $i(t)\cdot\rho\cdot\cos\left(\omega_0 t\right)$ використаємо формулу Ейлера: $\cos\left(\omega_0 t\right)=\dfrac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$ та скористаємось еквівалентною заміною $\rho_e=\dfrac{\rho}{2}$. Тоді

$$\begin{aligned}\rho_e\cos\left(\omega_0 t\right)&\fallingdotseq\int_0^\infty\rho_e\cdot\cos\left(\omega_0 t\right)\cdot e^{-pt}\cdot dt=\\&=\rho_e\int_0^\infty i(t)\cdot e^{-j\omega_0 t}\cdot e^{-pt}\cdot dt+\rho_e\int_0^\infty i(t)\cdot e^{+j\omega_0 t}\cdot e^{-pt}\cdot dt\fallingdotseq\\&\fallingdotseq\rho_e\left[J\left(p+j\omega_0 t\right)+J\left(p-j\omega_0 t\right)\right]\end{aligned} \qquad (4)$$

В кінцевому вигляді рівняння (3) має вигляд:

$$\Phi(p)=pL\cdot J(p)+\frac{1}{pC}\cdot J(p)+R_{\text{сп}}^{\min}\cdot J(p)+\rho\cdot J(p+j\omega_0)+\rho\cdot J(p-j\omega_0)$$

тут $\Phi(p)=\dfrac{U_m}{p^2+\omega^2}-\dfrac{U_C(0)}{p}+Li(0)$.

Виконавши ряд перетворень, отримаємо наступний кінцево-різницеве рівняння:

$$U(p)J(p-j\omega_0)+V(p)J(p)+W(p)J(p+j\omega_0)=\Phi(p) \qquad (5)$$

де $U(p)=\rho$;

$W(p)=\rho$;

$V(p)=pL+\dfrac{1}{pC}+R$.

З метою розв’язку алгебричного функціонального рівняння (5) зробимо заміну $p=p-jk\omega_0$ та $p=p+jk\omega_0$, де $k=0,1,2,...$

Визначимо, що $J(p-\alpha)=i_{-k}, \quad J(p+\alpha)=i_k$.

Тоді рівняння (5) перепишемо наступним чином:

$$\begin{cases} U_0 i_{-1} + V_0 i_0 + W_0 i_1 = \Phi_0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{2m} i_{2m-1} + V_{2m} i_{2m} + W_{2m} i_{2m-1} = \Phi_{2m}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язок системи (6) є граничний перехід при $m \to \infty$ такого розв'язку, коли з першого рівняння знаходять i_0, з другого i_1, з третього i_2 і так далі.

Відображення першої складової струму:

$$i_0 \bullet\!\!=^{\bullet} J_0(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{\Phi_0}{V_0};$$

другої

$$i_1 \bullet\!\!=^{\bullet} J_1(p) = \frac{1}{2} p \left[\frac{\Phi_1 U_0}{U_1 V_0} + \frac{\Phi_{-1} U_0}{U_{-1} V_0} \right].$$

Аналогічно знаходяться її інші складові.

Знаючи відображення, знаходимо оригінал струму навантаження, який є нескінченним тригонометричним рядом, що сходиться (для вхідної синусоїдної напруги):

$$i(t) = \frac{2U_m \sin(\omega t)}{\omega n} \left(1 + a\cos\omega_0 t + b \cdot \cos 2\omega_0 t + c \cdot \cos 3\omega_0 t + \ldots\right),$$

де *a, b, c* залежать від параметрів активного двополюсника та споживача;

$$m = U_0 = RC\rho; \quad n = V_1; \quad a = \left[\frac{m \cdot n}{n^2 - m^2} + \frac{m^3 \cdot n}{\left(n^2 - m^2\right)\left(2n - 2m^2\right)} \right].$$

Висновки. Доведено, що перетворення Лапласа можливо використати для аналізу електромагнітних процесів в усталеному режимі при навантаженнях, параметри яких змінюються періодично (за синусоїдним законом).

Перелік посилань

1. Пухов Г.Е. Комплексное исчисление АН ЧСС к, 1960
2. Левинштейн М.Л, Операционное исчисление и его приложения к задачам электротехники, «Энергия», м-л, 1972.
3. Zadeh J.A. "Time varying networks" Proc. JRE international convention record part 4. 1961
4. Перетятко Ю.В., Слободян Л.Р., Тихонюк В.С. Про використання перетворення Лапласу для аналізу процесів при змінному у часі навантаженні // Сучасні проблеми електроенерготехніки та автоматики: Матер. Междунар. научн. тех. конф. молодих учених, аспірантів і студентів, – Київ, 2013. – С.289-293.
5. Перетятко Ю.В., Слободян Л.Р., Столпаков Д.Є. Про використання перетворення Лапласу для ананалізу процесів при лінійному закону зміни навантаження // Сучасні проблеми електроенерготехніки та автоматики: Матер. Междунар. научн. тех. конф. молодих учених, аспірантів і студентів, – Київ, 2014. – С.403-405.