БІКОМПЛЕКСНИЙ РОЗРАХУНОК ВИХІДНОГО СИГНАЛУ ПЕРЕТВОРЮВАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ ДЛЯ АВТОНОМНИХ ОБ'ЄКТІВ ВІДНОВЛЮВАНОЇ ЕНЕРГЕТИКИ

Беленок Н.В., ст. викладач, Прудніков М.О., студент
КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра теоретичної електротехніки

Вступ. Сучасні системи електропостачання (СЕП) автономних об'єктів на основі відновлювальних джерел енергії (ВДЕ) є нелінійними та багатозв'язковими системами, в яких мають місце складні перехідні процеси та можливе виникнення критичних і хаотичних режимів.

Вивчення структур гіперчислових систем (ГЧС), їх особливостей, методів обчислення та апроксимації елементарних функцій гіперкомплексної змінної дає можливість застосування таких систем для аналізу та розрахунку параметрів перетворювальних пристроїв з багатократною модуляцією при використанні у автономних об'єктах (АО) відновлюваної енергетики. У деяких випадках застосування ГЧС дає змогу замінити вихідну задачу еквівалентною, тобто побудувати квазіаналогову модель розв'язку [1-5].

Для ефективного моделювання розв'язку задач, що стосуються перетворювальних пристроїв для використання у відновлюваних джерелах енергії (ВДЕ), у гіперкомплексній числовій системі необхідно знати дійсний вигляд функцій у цій системі, тобто вигляд складових функцій гіперкомплексної змінної.

Матеріали та результати досліджень. Алгоритми координатно-параметричного керування в інваріантних перетворювальних системах спричинили серйозні труднощі при аналізі нестаціонарних процесів у пристроях із багаторазовою модуляцією, що працюють з ВДЕ. З метою вирішення даного завдання, у якості математичного апарату доцільно використовувати гіперкомплексні системи числення. В даному випадку вибір ГЧС зводиться до бікомплексних чисел, за аналогією з класичним комплексним числом, яке має алгебраїчну конструкцію вигляду

$$z = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 = \sum_{m=1}^{4} e_m\, x_m \tag{1}$$

де $(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\Upsilon} \in R^4$ – точка евклідового простору. У табл. 1 наведено множення Келі базисних елементів цієї групи.

Таблиця 1 – Множення Келі базисних елементів бікомплексних чисел

e_m \ e_m	1	*i*	*j*	*k*
1	1	*i*	*j*	*k*
i	*i*	-1	*k*	-*j*
j	*j*	*k*	-1	-*i*
k	*k*	-*j*	-*i*	1

Координати точки вихідного евклідового простору, тобто дійсні множники при $1, i, j, k$, назвемо "компонентами" бікомплексу. Отже, прийнята у визначенні таблиця відрізняється від відповідної таблиці для кватерніонів (гіперкомплексних чисел) тим, що у цьому випадку множення комутативне.

Зазначимо, що $i_1, i_2 -$ уявні одиниці, для яких $i_1^2 = i_2^2 = -1$, однак $i_1 \neq \pm i_2$, а $i_3 = i_1 \cdot i_2$, причому $i_3^2 = 1$, $i_3 \neq \pm 1$. Бікомплексні числа можуть бути отримані комутативним подвоєнням поля комплексних чисел комплексними числами.

Користуючись алгеброю бікомплексного перетворення, розглянемо додаток ГЧС до дослідження перетворювальних пристроїв із багатократною модуляцією для АО ВДЕ.

З точки зору виконання умов інваріантності, доведено, що єдиним варіантом створення структурно-інваріантної перетворювальної системи є послідовне з’єднання модулятора та демодулятора у силовому тракті. Система на основі інформації про вхідну, вихідну напругу та збурюючи впливи, формує комутаційну функцію $\overline{Q}(t)$. Для отримання комутаційної функції $\overline{Q}(t)$ скористаємося формулою Ейлера та приведемо тригонометричний ряд Фур'є до комплексної форми

$$\overline{Q}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{(2k-1)} \cdot e^{j(2k-1)\omega t} / \sum_{n=1}^{\infty} C_{(2n-1)} \cdot e^{i(2n-1)\Omega t} \tag{2}$$

де *i, j* – різні уявні одиниці, що відповідають різним частотам *Ω* і *ω*. Таким чином, комутаційна функція в загальному вигляді може бути представлена добутком двох різних за частотою функцій:

$$\overline{Q}(t) = a(\omega t) \cdot b(\Omega t) \tag{3}$$

Здійснивши комплексне перетворення для складових функцій виразу (3), одержимо

$$\left.\begin{aligned} a(t) \doteqdot \dot{A}_k = a_{\mathrm{m}} \cos\alpha_{\mathrm{m}} + i a_{\mathrm{m}} \sin\alpha_{\mathrm{m}} \\ b(t) \doteqdot \dot{B}_k = b_k \cos\beta_k + j b_k \sin\beta_k, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

де *m, k* – номери гармоніки для *ω* і *Ω* ; *i, j* – різні уявні одиниці, що відповідають різним частотам *ω* і *Ω*;

$$\left.\begin{aligned} a_{\mathrm{m}} \sin\alpha_{\mathrm{m}} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a(t) cosm\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(\varphi/\omega) cosm\varphi d\varphi; \\ a_{\mathrm{m}} \cos\alpha_{\mathrm{m}} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} a(t) sinm\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} a(\varphi/\omega) sinm\varphi d\varphi; \\ b_{\mathrm{k}} \sin\beta_{\mathrm{k}} = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} b(t) cosk\Omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} b(\lambda/\Omega) cosk\lambda d\lambda; \\ b_{\mathrm{k}} \cos\beta_{\mathrm{k}} = \frac{\Omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} b(t) sink\Omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} b(\lambda/\Omega) sink\lambda d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

при чому $\varphi = \omega t, \lambda = \Omega t$.

Підставивши вирази (5) в (4), після перемноження $\dot{A}_k$ та $\dot{B}_k$ з урахуванням формули Ейлера одержимо інтегральне перетворення, яке назвемо бікомплексним перетворенням:

$$Q_{mk} = \dot{A}_m \dot{B}_k = \frac{1}{\pi^2} ij \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\varphi/\omega) \times b(\lambda/\Omega) e^{-im\varphi} e^{-jk\lambda} d\varphi d\lambda \tag{6}$$

Отримане перетворення є прямим бікомплексним перетворенням.

Обернене бікомплексне перетворення введемо таким чином:

$$Q(t) = Q(\varphi/\omega, \lambda/\Omega) = \frac{1}{4ij} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{Q}_{mk} e^{im\varphi} e^{jk\lambda} \tag{7}$$

З урахуванням виразу (6) отримаємо повне бікомплексне перетворення в інтегральній формі:

$$Q(t) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi + jk\lambda} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) \times b(\lambda/\Omega) e^{-im\varphi} e^{-jk\lambda} d\varphi d\lambda \tag{8}$$

Бікомплексне перетворення позначимо оператором $\Gamma_{m,k}[Q(t)] = \dot{Q}_{mk}$ або $\dot{Q}_{mk} \doteqdot Q(t)$, тобто вводимо поняття оригіналу й зображення біокомплексної функції.

Зазначимо, що з урахуванням викладеного, відоме комплексне перетворення є частковим випадком бікомплексного, оскільки при постійних $a(t)$ або $b(t)$, коли $m = 0$ або $k = 0$, введені інтегральні перетворення (6) − (8) стають рівними з точністю до постійних співмножників $2i$ або $2j$ відомим виразам комплексного перетворення періодичних функцій [1].

Користуючись основними правилами алгебри бікомплексного перетворення та бікомплексними зображеннями векторних функцій, зображення $Ce^{i\alpha}e^{j\beta}$ назвемо бікомплексною амплітудою гіпергармонічної функції $C\sin(\omega t + \alpha)\sin(\Omega t + \beta)$, а величину $i\omega + j\Omega = \omega_0$ – бікомплексною узагальненою частотою.

Аналогічні поняття вводяться й для m, k – гіпергармонічної складової функції $Q(t)$.

Геометричну інтерпретацію гіпергармонічної функції можна ввести вектором $\bar{C}$, що обертається з кутовою швидкістю Ω у системі координат $X_1 0 Y_1$, яка у свою чергу обертається з кутовою швидкістю ω у нерухомій системі координат $X0Y$ (рис. 1), звідки випливає, що проекція $mod[\bar{C}_4]$ на вісь $0X$ проекції $mod[\bar{C}_3 + \bar{C}_4]$ вектора $\bar{C}$ на вісь $0Y_1$ дорівнює $Csin(\omega t + \alpha) \cdot \sin(\Omega t + \beta)$.

Розглянуту площину можна вважати бікомплексною, якщо покласти, що осі $0X$ й $0Y$ відповідають дійсній (1) і уявній (i_1) осям площини $X0Y$ і дійсній (i_3) і уявній (i_2) осям площини $X_1 0 Y_1$. Тоді вектор $\bar{C}$ відповідає бікомплексній функції

$$\dot{C}(t) = C \cdot e^{i(\omega t+\alpha)} e^{j(\Omega t+\beta)} = C\cos(\omega t + \alpha) \cdot \cos(\Omega t + \beta) + \\ + i_1 C\cos(\omega t + \alpha)\sin(\Omega t + \beta) + i_2 C\sin(\omega t + \alpha)\cos(\Omega t + \beta) + \\ + i_3 C\sin(\omega t + \alpha)\sin(\Omega t + \beta) = \\ = mod[\bar{C}_1] + i_1 mod[\bar{C}_2] + i_2 mod[\bar{C}_3] + i_3 mod[\bar{C}_4] \tag{9}$$

При цьому бікомплексна амплітуда $\dot{C} = \dot{C}(t)_{|t=0}$ визначиться початковим положенням вектору $\bar{C}$. Такий зв'язок бікомплексних величин і вектору $\bar{C}$ має місце лише при $a \cdot d = b \cdot c$.

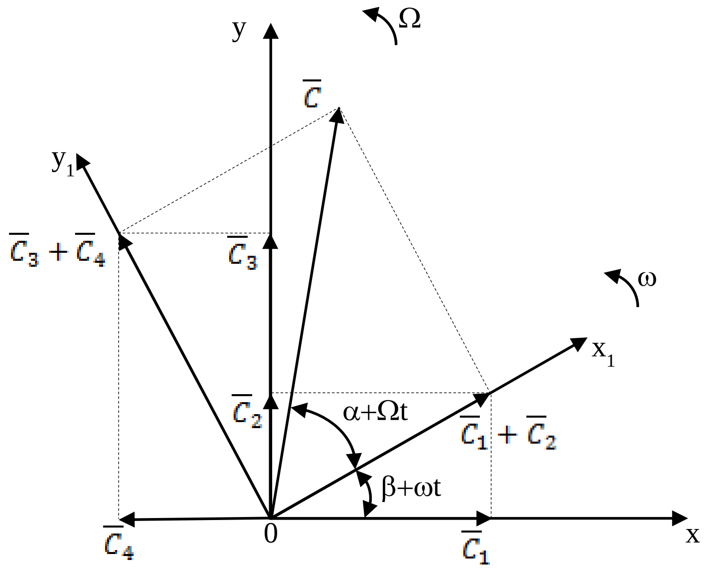

Рисунок 1 – Геометрична інтерпретація гіпергармонічної функції

Запропонований метод бікомплексного числення можна вважати узагальненням на більш абстрактному рівні відомого інтегрального символічного числення на область функцій гіперкомплексної змінної.

Користуючись конкретними співвідношеннями бікомплексного перетворення можна аналізувати вихідну напругу перетворювального пристрою із багаторазовою модуляцією і здійснювати моделювання систем електроживлення.

На основі проведених теоретичних досліджень розроблено ряд ПП із багаторазовою модуляцією та адаптивним координатно-параметричним керуванням у складі системи електропостачання з ВДЕ, які передбачають формування заданої вихідної напруги довільної форми з необхідною точністю за умови забезпечення інваріантності вихідних координат ПП до виду перетворюваної електроенергії на виході первинної системи з ВДЕ, а також до впливових координатно-параметричних збурень

Для аналізу за допомогою бікомплексного числення структури перетворювальних пристроїв із багатократною модуляцією для ВДЕ розглянемо більш детально вираз для комутаційної функції.

У загальному вигляді вираз (2) має вигляд

$$\overline{Q}(t) = \frac{\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\sum_{l=1}^{N}\left[g_l'\cos(2l-1)\alpha_l'\right]\right\}\cdot\cos(2k-1)\omega t}{\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\sum_{l=1}^{N}\left[g_l\cos(2l-1)\alpha_l\right]\right\}\cdot\cos(2n-1)\Omega t} \qquad (10)$$

Відомо [1], що поліноми від l у виразі (10) можуть бути представлені в замкнутій формі:

$$\sum_{l=1}^{N}\cos(2l-1)\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2N\alpha}{\sin\alpha} \qquad (11)$$

Тоді вираз (10) запишеться у вигляді

$$\overline{Q}(t) = \frac{\frac{g_l'\sin 2N\alpha_l'}{\sin\alpha_l'}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos(2k-1)\omega t}{\frac{g_l\sin 2N\alpha_l}{\sin\alpha_l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)\Omega t} \qquad (12)$$

Перетворимо останній вираз до вигляду

$$\overline{Q}(t) = \frac{Д_{n,k}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cos(2k-1)\omega t}{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos(2n-1)\Omega t} \qquad (13)$$

де $Д_{n,k} = \frac{g_l'\sin 2N\alpha_l'}{\sin\alpha_l'} \Big/ \frac{g_l\sin 2N\alpha_l}{\sin\alpha_l}$.

З метою подальшого спрощення виразу (13) представимо його знаменник для миттєвого значення аргументу у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\cos(2n-1)x = \frac{1}{2}\sec x \qquad (14)$$

Помножимо чисельник і знаменник виразу (13) на $\cos\Omega t$. Тоді з урахуванням того, що ($\cos x\cdot\sec x = 1$), і повертаючись до комплексної форми представлення рядів, отримаємо вираз (13) у вигляді

$$\bar{Q}(t) = Д_{n,k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}e^{i(2n-1)\omega t}\times\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}e^{j(2k-1)\Omega t} \qquad (15)$$

Отримаємо вихідний сигнал перетворювального пристрою із багатократною модуляцією в бікомплексній формі може бути представлено виразом

$$\dot{U}_{вих} = Д_{n,k}\dot{F}(i\Omega)\cdot\frac{1}{4ij}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{f}(jk\omega)\cdot\dot{F}(in\Omega) \qquad (16)$$

де узагальнена бікомплексна частота відповідає $(i+jq)\Omega,\ q = \omega/\Omega$.

Висновки. Сформульовано теоретичні положення методу бікомплексного перетворення, які зорієнтовані на аналіз інваріантних перетворювальних пристроїв з багатократною модуляцією та передбачають пряме і зворотне інтегральне перетворення. Розроблено та досліджено методику виконання функціональних операцій у гіперкомплексній області та основні правила алгебри бікомплексного перетворення, що дало можливість формулювати інформаційно повне аналітичне рішення вихідного сигналу перетворювальних пристроїв із багатократною модуляцією для різних форм вхідного впливу.

Перелік посилань

1. Касандров В.В. Алгебродинамика: кватернионы, твисторы, частицы. Вестник РУДН. Серия: Физика. 2000. Выпуск 8(1). С. 34-45.
2. Смолин А.Л. Гиперкомплексные преобразования Лоренца, эфир и остальная физика. Диалог-МГУ. 1999. 105с.
3. Топпан Ф. Алгебра с делением, суперсимметрии и октонионная М-теория. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. № 02(2). 2004. С. 112-129.
4. Ludkovsky S.V. Quasi-conformal functions of quaternion and octonion variables, their integral transformations. 2008. *Far East Journal of Mathematical Science (FJMS)* 28, 1. pp. 37- 88.
5. Smirnov V.S., Samkov A.V., Bulgach T.V. Theoretical and methodological Aspects of Intensive-converter system of Telecommunication complex organization. Mathematical simulation in electrotecnics, electronics, electroenergetics. 2006. Lviv. Lvivska poleticnica. P.482.
6. Смирнов В.С., Лизанец В.В., Самков А.В., Беленок Н.В., Иваниченко Е.В. Концептуальные основы построения усилительно-преобразовательных систем телекоммуникационного оборудования для фотоэнергетики. Матеріали МНТК «Відновлювана енергетика XXI століття». 2016. К. ІВЕ НАНУ. 29-30 вересня. С.286-290.
7. Смирнов В. С., Беленок Н. В., Иваниченко Е. В. Теоретические основы организации структурно-инвариантных преобразовательных систем автономных объектов для возобновляемой энергетики. «Відновлювана енергетика» 2016. ІВЕ НАНУ. №4(47). С.20-29.