

ІМІТАЦІЙНА МОДЕЛЬ НЕСИМЕТРИЧНОЇ ТРИФАЗНОЇ СИСТЕМИ ПРИ З'ЄДНАННІ НАВАНТАЖЕННЯ ЗА СХЕМОЮ «ТРИКУТНИК»

Бурик М.П., к.т.н., Очеретна А.О., студентка

КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра теоретичної електротехніки

Вступ. Несиметричні режими енергетичного обладнання між фазами електричних машин, що мають індуктивний зв'язок, системи з динамічними навантаженням, електричні кола з потужними однофазними споживачами та аварійні режими в трифазних колах раціонально аналізувати за допомогою методу симетричних складових. Суть методу полягає в представленні електричних координат (струмів, напруг) кола через симетричні складові нульової (0), прямої (1) та зворотної (2) послідовностей чергування фаз [1-4].

Математично несиметричну систему можна записати як

$$\begin{cases} \underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_0; \\ \underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2 + \underline{B}_0 = a^2 \cdot \underline{A}_1 + a \cdot \underline{A}_2 + \underline{A}_0; \\ \underline{C} = \underline{C}_1 + \underline{C}_2 + \underline{C}_0 = a \cdot \underline{A}_1 + a^2 \cdot \underline{A}_2 + \underline{A}_0, \end{cases} \quad (1)$$

де $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ - позначення векторів фаз трифазного кола; $a = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ - оператором повороту вектора на кут 120° у додатному напрямі (проти руху годинникової стрілки); $a^2 = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ - оператором повороту вектора на кут 120° за годинниковою стрілкою.

Аналіз трифазних електричних кіл також проводять шляхом застосування моделювання за допомогою сучасного цифрового обладнання [5-6].

Мета роботи. Проаналізувати вплив несиметричного джерела енергії на трифазні електричні кола методом симетричних складових прямої, зворотної та нульової послідовностей чергування фаз. Дослідити електричну систему при з'єднанні навантаження за схемою «трикутник». За допомогою моделювання із застосуванням програмного продукту Matlab в пакеті прикладних програм Simulink (SimPowerSystems) провести дослідження трифазного несиметричного електричного кола

Матеріали і результати досліджень. Дослідження трифазної несиметричної системи (рис. 1) проводилось за рахунок застосування розробленої імітаційної моделі в SimPowerSystems (MatLab). В якості несиметричного джерела використовувався трифазний генератор, векторна діаграма ЕРС якого представлена на рис. 2. Несиметричний трифазний генератор ЕРС з'єднаний за схемою «зірка». Трифазний споживач з'єднаний за схемою «трикутник».

Діючи значення фазних напруг джерела $U_A = 20(V)$, $U_B = 20(V)$ та $U_C = 20(V)$. Величини опорів фаз навантаження $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = R = 100 (Om)$.

Параметри лінії $\underline{Z}_{\text{ЛA}} = \underline{Z}_{\text{ЛB}} = \underline{Z}_{\text{ЛC}} = R = 100 \text{ (Ом)}$.

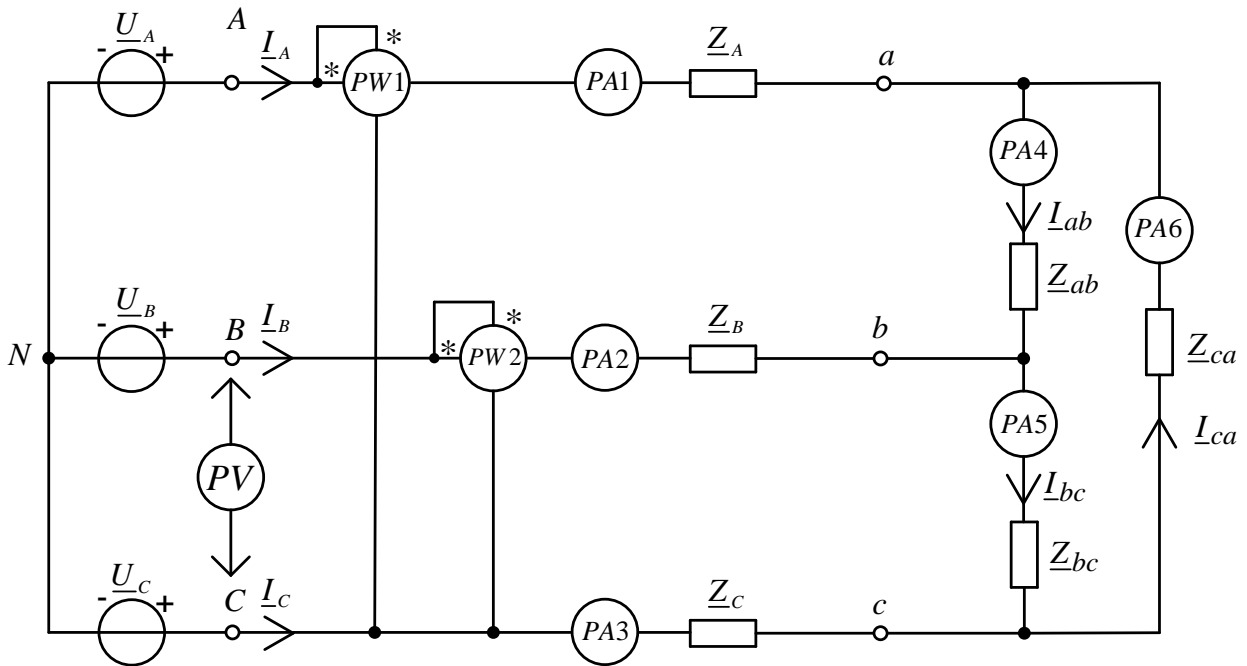


Рисунок 1 – Схема трифазної несиметричної системи з навантаженням з'єднаним за схемою «трикутник»

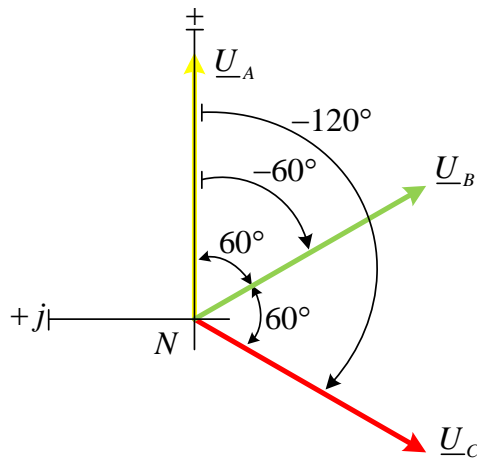


Рисунок 2 – Векторні діаграми ЕРС трифазних генератора при з'єднанні його обмоток за схемою «зірка»

Представимо фазні ЕРС джерела (рис. 2) у комплексній формі

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= 20 \cdot e^{-j \cdot 0} = 20 \text{ В}; \\ \underline{U}_B &= 20 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_C &= 20 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \text{ В}. \end{aligned} \tag{2}$$

Визначимо нульову, пряму та зворотну симетричні складові фазної напруги \underline{U}_A

$$\begin{aligned}\underline{U}_{A0} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C) = \frac{1}{3} \cdot (20 \cdot e^{-j \cdot 0} + 20 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} + 20 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}) = \\ &= 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \text{ В};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{A1} &= \frac{1}{3} \cdot (\underline{U}_A + a \cdot \underline{U}_B + a^2 \cdot \underline{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (20 + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 20 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 20 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}) = 13.333 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} \text{ В};\end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\underline{U}_{A2} &= \frac{1}{3} (\underline{U}_A + a^2 \cdot \underline{U}_B + a \cdot \underline{U}_C) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (20 + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 20 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 20 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ}) = 6.667 \text{ В}.\end{aligned}$$

Знаючи симетричні складові фазної напруги \underline{U}_A , визначимо симетричні складові фазних напруг \underline{U}_B та \underline{U}_C

Нульова складова

$$\underline{U}_{A0} = \underline{U}_{B0} = \underline{U}_{C0} = 6.667 - j \cdot 11.547 = 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \text{ В}.$$

Пряма складова

$$\begin{aligned}\underline{U}_{B1} &= a^2 \cdot \underline{U}_{A1} = e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 13.333 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} = 6.667 - j \cdot 11.547 = 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_{C1} &= a \cdot \underline{U}_{A1} = e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 13.333 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} = -13.333 = 13.333 \cdot e^{j \cdot 180^\circ} \text{ В}.\end{aligned} \quad (4)$$

Зворотна складова

$$\begin{aligned}\underline{U}_{B2} &= a \cdot \underline{U}_{A2} = e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 6.667 = (3.333 + j \cdot 5.774) = 6.667 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \text{ В}; \\ \underline{U}_{C2} &= a^2 \cdot \underline{U}_{A2} = e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 6.667 = (-3.333 - j \cdot 5.774) = 6.667 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Симетричні складові лінійних напруг трифазного генератора розраховуються за допомогою симетричних складових фазних напруг

Нульова складова

$$\underline{U}_{AB0} = \underline{U}_{A0} - \underline{U}_{B0} = 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} - 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} = 0;$$

$$\underline{U}_{BC0} = \underline{U}_{B0} - \underline{U}_{C0} = 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} - 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} = 0;$$

$$\underline{U}_{CA0} = \underline{U}_{C0} - \underline{U}_{A0} = 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} - 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} = 0.$$

Пряма складова

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB1} &= \underline{U}_{A1} - \underline{U}_{B1} = 13.333 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} - 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} = \\ &= j \cdot 23.094 = 23.094 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{BC1} &= \underline{U}_{B1} - \underline{U}_{C1} = 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} - 13.333 \cdot e^{j \cdot 180^\circ} = \\ &= 20 - j \cdot 11.547 = 23.094 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{CA1} &= \underline{U}_{C1} - \underline{U}_{A1} = 13.333 \cdot e^{j \cdot 180^\circ} - 13.333 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} = \\ &= -20 - j \cdot 11.547 = 23.094 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \text{ В}. \end{aligned}$$

Зворотна складова

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB2} &= \underline{U}_{A2} - \underline{U}_{B2} = 6.667 - 6.667 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} = (10 - j \cdot 5.774) = \\ &= 11.547 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{BC2} &= \underline{U}_{B2} - \underline{U}_{C2} = 6.667 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} - 6.667 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = j \cdot 11.547 = \\ &= 11.547 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{CA2} &= \underline{U}_{C2} - \underline{U}_{A2} = 6.667 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} - 6.667 = -10 - j \cdot 5.774 = \\ &= 11.547 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \text{ В}. \end{aligned} \tag{5}$$

Використаємо імітаційні моделі у пакеті прикладних програм SimPowerSystems (Matlab) (рис. 3), щоб отримати миттєві значення симетричних складових фазних напруг генератора A , B , C та заданих ЕРС трифазного джерела енергії. Жовтим кольором зображується фаза A трифазної системи. Зеленим кольором зображується фаза B трифазної системи. Червоним кольором зображується фаза C трифазної системи.

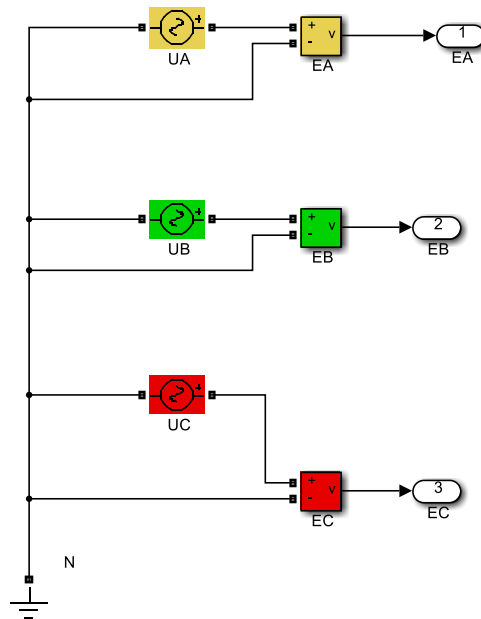
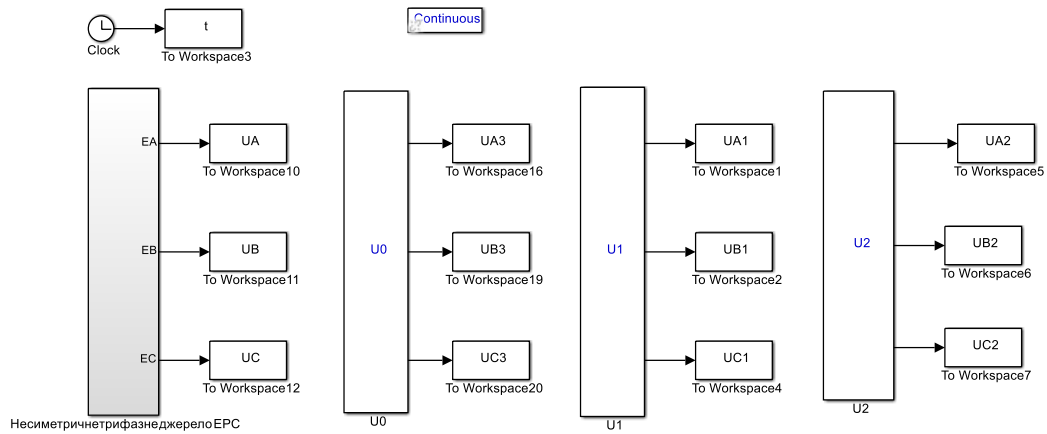


Рисунок 3 – Імітаційні моделі для виведення миттєвих значень симетричних складових

Миттєві значення симетричних складових представляємо за допомогою лістинга програми для Matlab, які наведені на рис. 4.

```
figure; %
subplot(4,3,1); %
plot(t,UA0,'k:','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UA0, V');
grid; %
subplot(4,3,2); %
plot(t,UB0,'k:','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UB0, V');
grid; %
subplot(4,3,3); %
```

```

plot(t,UC0,'k:','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UC0, V');
grid; %
subplot(4,3,4); %
plot(t,UA1,'k--','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UA1, V');
grid; %
subplot(4,3,5); %
plot(t,UB1,'k--','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UB1, V');
grid; %
subplot(4,3,6); %
plot(t,UC1,'k--','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UC1, V');
grid; %
subplot(4,3,7); %
plot(t,UA2,'k-','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UA2, V');
grid; %
subplot(4,3,8); %
plot(t,UB2,'k-','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UB2, V');
grid; %
subplot(4,3,9); %
plot(t,UC2,'k-','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UC2, V');
grid; %
subplot(4,3,10); %
plot(t,UA,'y-','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UA, V');
grid; %
subplot(4,3,11); %
plot(t,UB,'g-','LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UB, V');
grid; %
subplot(4,3,12); %

```

```

plot(t,UC,'r-', 'LineWidth',2); %
xlabel('t, s'); %
ylabel('UC, V');
grid; %

```

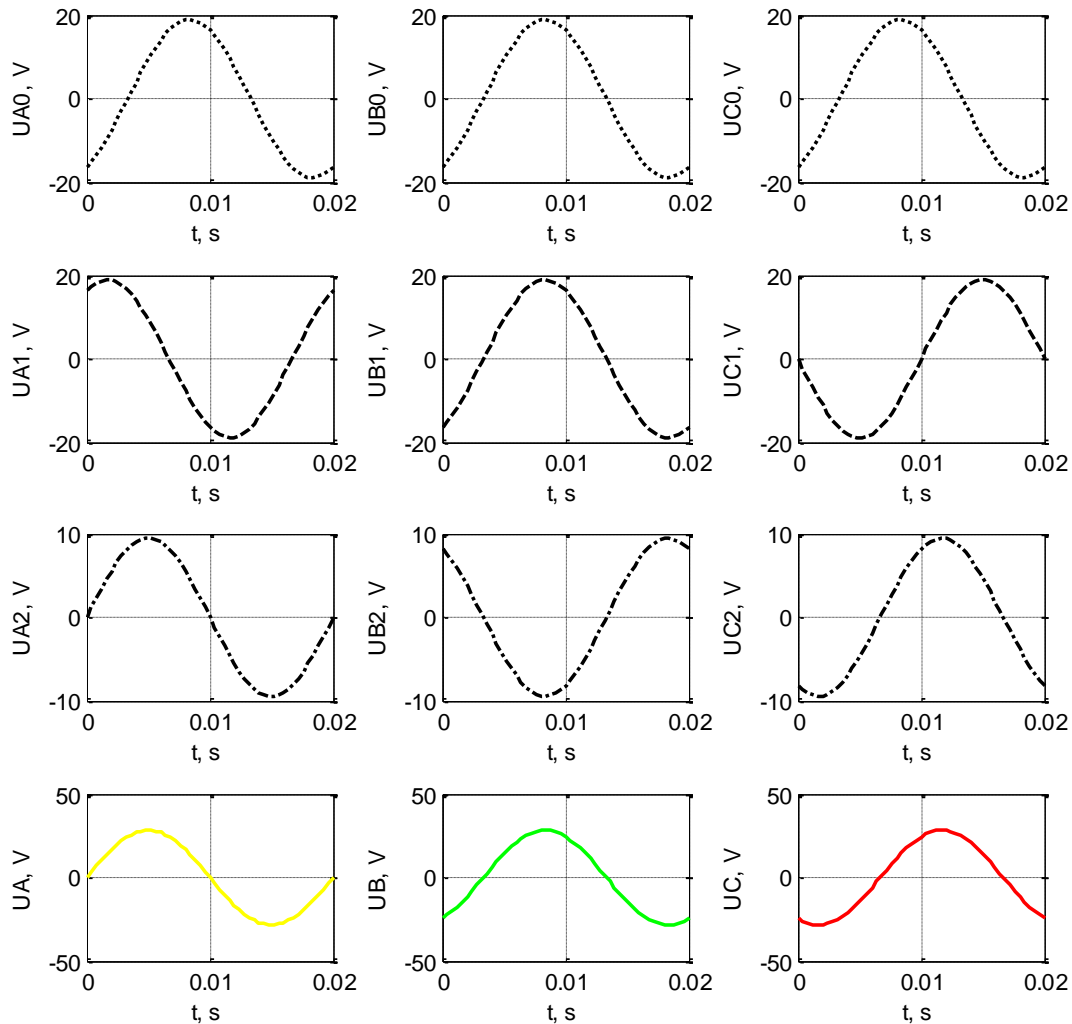


Рисунок 4 – Миттєвих значення симетричних складових фазний напруг генератора A, B, C та заданих ЕРС джерела

Зробимо аналіз трифазної несиметричної системи (рис. 5) методом контурних струмів. Напрямки контурних струмів $\underline{I}_{K1}, \underline{I}_{K2}, \underline{I}_{K3}$ виберемо за годинниковою стрілкою.

Визначимо значення власних контурних опорів за формулами

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_{ЛA} + \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ЛB} = 100 + 100 + 100 = 300 \text{ Ом}; \\
 \underline{Z}_{22} &= \underline{Z}_{ЛB} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ЛC} = 100 + 100 + 100 = 300 \text{ Ом}; \\
 \underline{Z}_{33} &= \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca} = 100 + 100 + 100 = 300 \text{ Ом}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

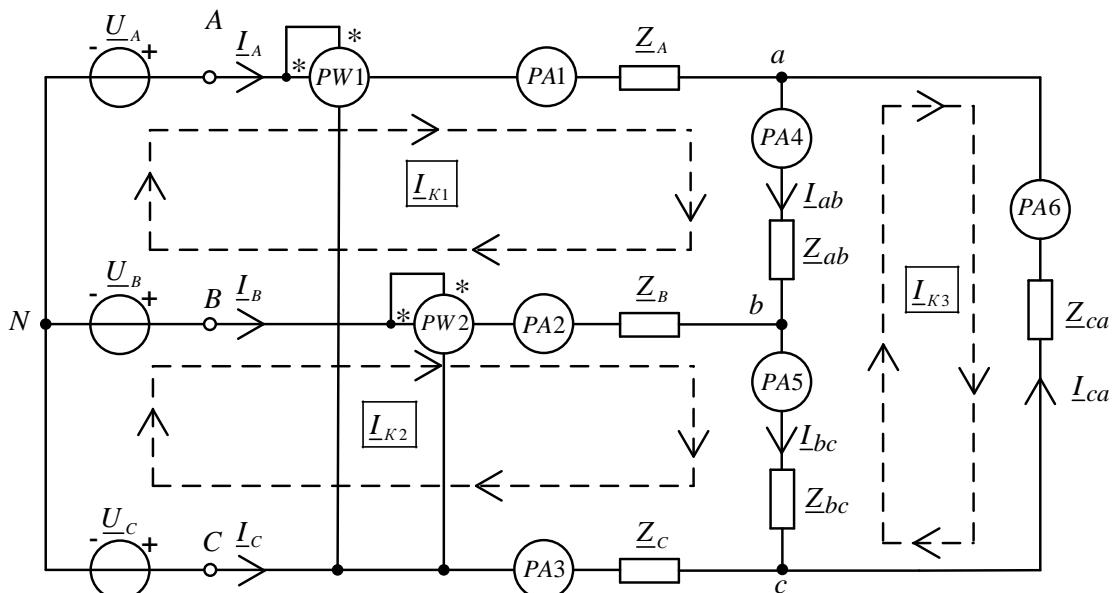


Рисунок 5 – Схема трифазної несиметричної системи

Обрахуємо значення суміжних (взаємних) опорів між контурами

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_{ЛВ} &= -100 \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = -\underline{Z}_{ab} &= -100 \text{ Ом}; \\ \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = -\underline{Z}_{bc} &= -100 \text{ Ом}. \end{aligned} \quad (7)$$

Контурні ЕРС для прямої симетричної складової визначається за наступними виразами

$$\begin{aligned} \underline{E}_{K1_1} = \underline{U}_{A1} - \underline{U}_{B1} &= 13.333 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} - 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} = 23.094 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \text{ В}; \\ \underline{E}_{K2_1} = \underline{U}_{B1} - \underline{U}_{C1} &= 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} - 13.333 \cdot e^{j \cdot 180^\circ} = 23.094 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \text{ В}; \\ \underline{E}_{K3_1} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Контурні струми для прямої складової визначимо через зворотну матрицю

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{I}_{K1_1} \\ \underline{I}_{K2_1} \\ \underline{I}_{K3_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_{K1_1} \\ \underline{E}_{K2_1} \\ \underline{E}_{K3_1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 300 & -100 & -100 \\ -100 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & 300 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 23.094 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \\ 23.094 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} \\ 0.1 \cdot e^0 \\ 0.058 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} \end{pmatrix} \text{ А}. \end{aligned} \quad (9)$$

Розрахуємо струми в електричному колі використовуючи знайдені контурні струми для прямої симетричної складової

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_{A1} &= \underline{I}_{K1_1} = 0.1 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} \text{ A}; \\
 \underline{I}_{B1} &= \underline{I}_{K2_1} - \underline{I}_{K1_1} = 0.1 - 0.1 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} = 0.1 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \text{ A}; \\
 \underline{I}_{C1} &= -\underline{I}_{K2_1} = -0.1 = 0.1 \cdot e^{j \cdot 180^\circ} \text{ A}; \\
 \underline{I}_{ab1} &= \underline{I}_{K1_1} - \underline{I}_{K3_1} = 0.1 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} - 0.058 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 0.058 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \text{ A}; \\
 \underline{I}_{bc1} &= \underline{I}_{K2_1} - \underline{I}_{K3_1} = 0.1 - 0.058 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 0.058 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \text{ A}; \\
 \underline{I}_{ca1} &= -\underline{I}_{K3_1} = -0.058 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 0.058 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \text{ A}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Визначимо напруги на навантаженні для прямої симетричної складової за наступними виразами

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{ab1} &= \underline{I}_{ab1} \cdot \underline{Z}_{ab} = 0.058 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \cdot 100 = 5.8 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \text{ B}; \\
 \underline{U}_{bc1} &= \underline{I}_{bc1} \cdot \underline{Z}_{bc} = 0.058 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \cdot 100 = 5.8 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \text{ B}; \\
 \underline{U}_{ca1} &= \underline{I}_{ca1} \cdot \underline{Z}_{ca} = 0.058 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \cdot 100 = 5.8 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \text{ B}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Падіння напруги в лінії для прямої складової дорівнює

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{AA1} &= \underline{I}_{A1} \cdot \underline{Z}_{ЛА} = 0.1 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} \cdot 100 = 10 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} \text{ B}; \\
 \underline{U}_{BB1} &= \underline{I}_{B1} \cdot \underline{Z}_{ЛВ} = 0.1 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \cdot 100 = 10 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \text{ B}; \\
 \underline{U}_{CC1} &= \underline{I}_{C1} \cdot \underline{Z}_{ЛС} = 0.1 \cdot e^{j \cdot 180^\circ} \cdot 100 = 10 \cdot e^{j \cdot 180^\circ} \text{ B}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Контурні ЕРС для зворотної симетричної складової визначається за наступними виразами

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_{K1_2} &= \underline{U}_{A2} - \underline{U}_{B2} = 6.667 - 6.667 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} = 11.547 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \text{ B}; \\
 \underline{E}_{K2_2} &= \underline{U}_{B2} - \underline{U}_{C2} = 6.667 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} - 6.667 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} = 11.547 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \text{ B}; \\
 \underline{E}_{K3_2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Контурні струми для зворотної складової визначимо через зворотну матрицю

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \underline{I}_{K1_2} \\ \underline{I}_{K2_2} \\ \underline{I}_{K3_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_{K1_2} \\ \underline{E}_{K2_2} \\ \underline{E}_{K3_2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 300 & -100 & -100 \\ -100 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & 300 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11.547 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \\ 11.547 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.05 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} \\ 0.029 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} \end{pmatrix} A.
\end{aligned} \tag{14}$$

Розрахуємо струми в електричному колі використовуючи знайдені контурні струми для зворотної симетричної складової

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{A2} &= \underline{I}_{K1_2} = 0.05 A; \\
\underline{I}_{B2} &= \underline{I}_{K2_2} - \underline{I}_{K1_2} = 0.05 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} - 0.05 = 0.1 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} A; \\
\underline{I}_{C2} &= -\underline{I}_{K2_2} = -0.05 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} = 0.05 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} A; \\
\underline{I}_{ab2} &= \underline{I}_{K1_2} - \underline{I}_{K3_2} = 0.05 - 0.029 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 0.029 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} A; \\
\underline{I}_{bc2} &= \underline{I}_{K2_2} - \underline{I}_{K3_2} = 0.05 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} - 0.029 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 0.029 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} A; \\
\underline{I}_{ca2} &= -\underline{I}_{K3_2} = -0.029 \cdot e^{j \cdot 30^\circ} = 0.029 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} A.
\end{aligned} \tag{15}$$

Визначимо напруги на навантаженні для зворотної симетричної складової за наступними виразами

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{ab2} &= \underline{I}_{ab2} \cdot \underline{Z}_{ab} = 0.029 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} \cdot 100 = 2.887 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} B; \\
\underline{U}_{bc2} &= \underline{I}_{bc2} \cdot \underline{Z}_{bc} = 0.029 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} \cdot 100 = 2.887 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} B; \\
\underline{U}_{ca2} &= \underline{I}_{ca2} \cdot \underline{Z}_{ca} = 0.029 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \cdot 100 = 2.887 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} B.
\end{aligned} \tag{16}$$

Падіння напруги в лінії для зворотної складової дорівнює

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{Aa2} &= \underline{I}_{A2} \cdot \underline{Z}_{ЛA} = 0.05 \cdot e^{j \cdot 0} \cdot 100 = 5 B; \\
\underline{U}_{Bb2} &= \underline{I}_{B2} \cdot \underline{Z}_{ЛB} = 0.05 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 100 = 5 \cdot e^{j \cdot 120^\circ} B; \\
\underline{U}_{Cc2} &= \underline{I}_{C2} \cdot \underline{Z}_{ЛC} = 0.05 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 100 = 5 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} B.
\end{aligned} \tag{17}$$

Контурні ЕРС для нульової симетричної складової визначається за наступними виразами

$$\begin{aligned}
\underline{E}_{K1_0} &= \underline{U}_{A0} - \underline{U}_{B0} = 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} - 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} = 0; \\
\underline{E}_{K2_0} &= \underline{U}_{B0} - \underline{U}_{C0} = 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} - 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} = 0; \\
\underline{E}_{K3_0} &= 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Контурні струми для нульової складової визначимо через зворотну матрицю

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \underline{I}_{K1_0} \\ \underline{I}_{K2_0} \\ \underline{I}_{K3_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_{K1_0} \\ \underline{E}_{K2_0} \\ \underline{E}_{K3_0} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 300 & -100 & -100 \\ -100 & 300 & -100 \\ -100 & -100 & 300 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

Для нульової симетричної складової струми в електричному колі дорівнюють

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{A0} &= \underline{I}_{K1_0} = 0; \\
\underline{I}_{B0} &= \underline{I}_{K2_0} - \underline{I}_{K1_0} = 0 - 0 = 0; \\
\underline{I}_{C0} &= -\underline{I}_{K2_0} = -0 = 0; \\
\underline{I}_{ab0} &= \underline{I}_{K1_0} - \underline{I}_{K3_0} = 0 - 0 = 0; \\
\underline{I}_{bc0} &= \underline{I}_{K2_0} - \underline{I}_{K3_0} = 0 - 0 = 0; \\
\underline{I}_{ca0} &= -\underline{I}_{K3_0} = -0 = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Визначимо напруги на навантаженні для нульової симетричної складової

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{ab0} &= \underline{I}_{ab0} \cdot \underline{Z}_{ab} = 0 \cdot 100 = 0; \\
\underline{U}_{bc0} &= \underline{I}_{bc0} \cdot \underline{Z}_{bc} = 0 \cdot 100 = 0; \\
\underline{U}_{ca0} &= \underline{I}_{ca0} \cdot \underline{Z}_{ca} = 0 \cdot 100 = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Падіння напруги в лінії нульової складової дорівнює

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{Aa0} &= \underline{I}_{A0} \cdot \underline{Z}_{ЛA} = 0 \cdot 100 = 0; \\
\underline{U}_{Bb0} &= \underline{I}_{B0} \cdot \underline{Z}_{ЛB} = 0 \cdot 100 = 0; \\
\underline{U}_{Cc0} &= \underline{I}_{C0} \cdot \underline{Z}_{ЛC} = 0 \cdot 100 = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Лінійні струми для електричного кола (рис. 5) розраховуються за наступними виразами

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_A &= \underline{I}_{A0} + \underline{I}_{A1} + \underline{I}_{A2} = 0 + 0.1 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} + 0.05 = 0.132 \cdot e^{j \cdot 40.893^\circ} \text{ A}; \\
 \underline{I}_B &= \underline{I}_{A0} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{I}_{A1} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{I}_{A2} = \\
 &= 0 + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 0.1 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 0.05 = 0.05 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \text{ A}; \\
 \underline{I}_C &= \underline{I}_{A0} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{I}_{A1} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{I}_{A2} = \\
 &= 0 + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 0.1 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 0.05 = 0.132 \cdot e^{-j \cdot 160.893^\circ} \text{ A}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Визначимо фазну напругу джерела живлення

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_A &= \underline{U}_{A0} + \underline{U}_{A1} + \underline{U}_{A2} = 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} + 13.333 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} + 6.667 \cdot e^{j \cdot 0} = 20 \text{ B}; \\
 \underline{U}_B &= \underline{U}_{A0} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{A1} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{A2} = \\
 &= 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 13.333 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 6.667 \cdot e^{j \cdot 0} = 20 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \text{ B}; \\
 \underline{U}_C &= \underline{U}_{A0} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{A1} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{A2} = \\
 &= 13.333 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 13.333 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 6.667 \cdot e^{j \cdot 0} = 20 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \text{ B}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Фазні струми для навантаження електричного кола, що з'єднане за схемою «трикутник», обраховуються за формулами

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_{ab} &= \underline{I}_{ab0} + \underline{I}_{ab1} + \underline{I}_{ab2} = \\
 &= 0 + 0.5774 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} + 0.029 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} = 0.05 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} \text{ A}; \\
 \underline{I}_{bc} &= \underline{I}_{ab0} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{I}_{ab1} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{I}_{ab2} = \\
 &= 0 + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 0.5774 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 0.029 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} = 0.05 \text{ A}; \\
 \underline{I}_{ca} &= \underline{I}_{ab0} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{I}_{ab1} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{I}_{ab2} = \\
 &= 0 + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 0.5774 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 0.029 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} = 0.087 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \text{ A}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Фазні напруги на навантаженні розраховуються за формулами

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{ab} &= \underline{U}_{ab0} + \underline{U}_{ab1} + \underline{U}_{ab2} = 0 + 5.774 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} + 2.887 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} = 5 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} \text{ B}; \\
\underline{U}_{bc} &= \underline{U}_{ab0} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{ab1} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{ab2} = \\
&= 0 + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 5.774 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 2.887 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} = 5 \text{ B}; \\
\underline{U}_{ca} &= \underline{U}_{ab0} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{ab1} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{ab2} = \\
&= 0 + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 5.774 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 2.887 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} = 8.66 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \text{ B}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Визначимо лінійні напруги генератора

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{AB} &= \underline{U}_{AB0} + \underline{U}_{AB1} + \underline{U}_{AB2} = 0 + 23.094 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} + 11.547 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} = 20 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} \text{ B}; \\
\underline{U}_{BC} &= \underline{U}_{AB0} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{AB1} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{AB2} = \\
&= 0 + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 23.094 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 11.547 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} = 20 \text{ B}; \\
\underline{U}_{CA} &= \underline{U}_{AB0} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{AB1} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{AB2} = \\
&= 0 + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 23.094 \cdot e^{j \cdot 90^\circ} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 11.547 \cdot e^{-j \cdot 30^\circ} = 34.641 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \text{ B}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Падіння напруги в лінії дорівнює

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{Aa} &= \underline{U}_{Aa0} + \underline{U}_{Aa1} + \underline{U}_{Aa2} = 0 + 10 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} + 5 = 13.229 \cdot e^{j \cdot 40.893^\circ} \text{ B}; \\
\underline{U}_{Bb} &= \underline{U}_{Aa0} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{Aa1} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{Aa2} = 0 + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 10 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 5 = \\
&= 5 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \text{ B}; \\
\underline{U}_{Cc} &= \underline{U}_{Aa0} + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{Aa1} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot \underline{U}_{Aa2} = \\
&= 0 + e^{j \cdot 120^\circ} \cdot 10 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} + e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 5 = 13.229 \cdot e^{-j \cdot 160.893^\circ} \text{ B}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Розрахуємо активні потужності трифазного електричного кола та складемо баланс потужностей

$$P_1 = \text{Re}(-\underline{U}_{CA} \cdot \underline{I}_A^*) = -34.641 \cdot e^{-j \cdot 150^\circ} \cdot 0.132 \cdot e^{-j \cdot 40.893^\circ} = 4.5 \text{ Bm};$$

$$P_2 = \text{Re}(\underline{U}_{BC} \cdot \underline{I}_B^*) = 20 \cdot 0.05 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} = 0.5 \text{ Bm}; P = P_1 + P_2 = 4.5 + 0.5 = 5 \text{ Bm};$$

$$\underline{S}_I = \underline{U}_A \cdot \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \cdot \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \cdot \underline{I}_C^* = 20 \cdot 0.132 \cdot e^{-j \cdot 40.893^\circ} + 20 \cdot e^{-j \cdot 60^\circ} \cdot 0.05 \cdot e^{j \cdot 60^\circ} + \dots \quad (29)$$

$$\dots + 20 \cdot e^{-j \cdot 120^\circ} \cdot 0.132 \cdot e^{j \cdot 160.893^\circ} = 5 \text{ BA};$$

$$\underline{S}_H = I_A^2 \cdot \underline{Z}_A + I_B^2 \cdot \underline{Z}_B + I_C^2 \cdot \underline{Z}_C + I_N^2 \cdot \underline{Z}_N = 0.132^2 \cdot 200 + 0.05^2 \cdot 200 + \dots$$

$$\dots + 0.132^2 \cdot 200 = 5 \text{ BA}.$$

Використовуючи імітаційну модель несиметричної трифазної системи зі схемою з'єднання генератора та споживача «зірка – трикутник» у пакеті прикладних програм SimPowerSystems (Matlab), яка наведена на рис. 6, визначаємо покази вимірювальних приладів.

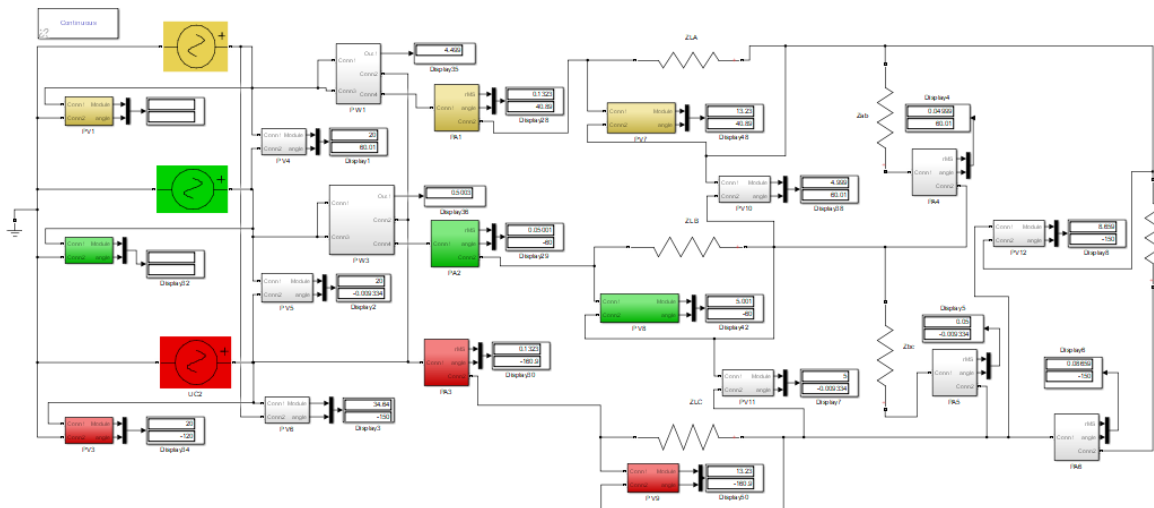


Рисунок 6 – Імітаційна модель несиметричної трифазної системи зі схемою з'єднання генератора та споживача «зірка – трикутник»

Баланс потужностей виконується $\underline{S}_{\text{ГЕН}} = \underline{S}_{\text{СПОЖ}}$, що свідчить вірність знайдених величин координат електричного кола. Результати розрахунків та моделювання співпадають, тому імітаційну модель несиметричної трифазної системи з схемою з'єднання генератора та споживача «зірка – трикутник» після верифікації можна використовувати дослідження несиметричних трифазних кіл методом симетричних складових. На рис. 7 представимо векторну діаграму струмів (напруг) для електричного кола, яке зображено на рис. 5.

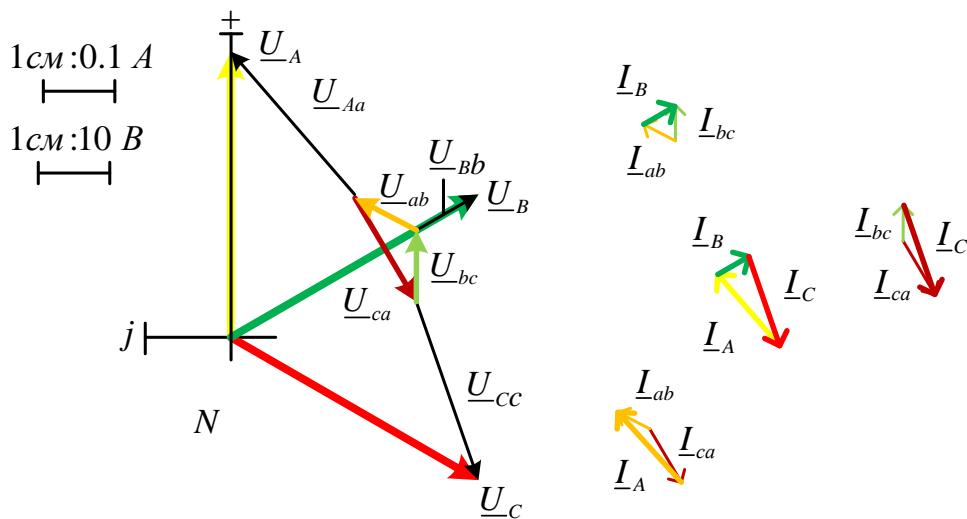


Рисунок 7 – Векторні діаграми струмів та напруг несиметричної трифазної системи зі схемою з'єднання генератора та споживача «зірка – трикутник»

Висновок. Імітаційна модель несиметричної трифазної системи зі схемою з'єднання генератора та споживача «зірка – трикутник», що наведена середовищі Matlab, дозволяє аналізувати трифазні електричні кола з несиметричним джерелом методом симетричних складових. М-файлами програми Matlab дозволяють отримати всі необхідні координати електричного кола, що аналізуються, у вигляді миттєвих значень або комплексів.

Результати моделювання та розрахунки показали, що у трифазному колі з несиметричним джерелом зі схемою з'єднання генератора та споживача «зірка – трикутник», відсутність нульової складової у струмах електричного кола і тільки фазні напруги джерела мають нульову складову. Величини повних комплексних потужностей генератора та споживача для досліджуваної схеми співпадають ($\underline{S}_G = \underline{S}_H$).

Перелік посилань

1. Бойко В.С., Бойко В.В., Видолоб Ю.Ф., Курило І.А., Шеховцов В.І. та Шидловська Н.А. Теоретичні основи електротехніки: підручник: У 3 т. / За заг. ред. І.М. Чиженка, В.С. Бойка. – К : НТУУ «КПІ», 2013. – 244 с.
2. Щерба А.А. Симетричні складові та вищі гармоніки у трифазних колах: Методичні вказівки до виконання розрахункових робіт з курсу «Теоретична електротехніка» для студ. напрямів підготовки 0906 «Електротехніка», 0922 «Електромеханіка» / Уклад.: А.А. Щерба, І.А. Курило, І.Н. Намацалюк. – К.: НТУУ «КПІ», 2007. – 76 с.
3. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей: учебник. - М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.
4. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: Т1. Учебник. – Л.: Энергоиздат, 1981. - 536 с
5. Терехин В.Б. Моделирование систем электропривода в Simulink (Matlab 7.0.1) // учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2008. – 320 с.
6. Бурик М.П. Імітаційна модель однорідної симетричної ланцюгової схеми / М.П. Бурик, Д.С. Коломійчук// Тези доповідей за матеріалами Міжнародної науково-технічної конференції молодих учених, аспірантів і студентів "Сучасні проблеми електроенергетехніки та автоматики". – Київ: ФЕА НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» 2021. – С 446-462.