

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНИХ ЛОГАРИФМІЧНИХ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК В СЕРЕДОВИЩІ ПАКЕТУ МАТЛАБ

Толочко О.І., проф., Щербаченко В.В., студ.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра автоматизації електромеханічних систем та електроприводу

Вступ. При аналізі систем автоматичного керування (САК) часто виникає задача побудови логарифмічних амплітудно-частотних характеристик (ЛАЧХ) $L(\lg\omega)$ за їх передавальними функціями (ПФ) $W(s)$ [1 та багато ін.]. Амплітуда L в децибелах (дБ) розраховується за формулою

$$L(\omega) = 20 \lg |W(s)|_{s=j\omega}. \quad (1)$$

Отже, для побудови точної ЛАЧХ можна застосувати будь-який програмний засіб з розвиненим графічним інтерфейсом, здатний оперувати з комплексними числами. Але, щоб отримати уяву про якість перехідних процесів в замкненій системі частотним методом, треба побудувати саме асимптотичну, а не точну ЛАЧХ розімкненої системи. Її особливість полягає у кусково-лінійній апроксимації точної характеристики дотичними до неї прямими з коефіцієнтами нахилу

$$k_n = \pm 20k, \text{ дБ/дек}, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Абсциси точок зламу збігаються з частотами (амплітудами) ненульових полюсів та нулів досліджуваної системи з розімкненим зовнішнім зворотним зв'язком.

Вручну асимптотична ЛАЧХ (АЛАЧХ) будується значно швидше за точну, тому що потребує значно менше розрахунків. Але алгоритм побудови АЛАЧХ є набагато складнішим. Може саме з цієї причини відомі програмні пакети отримують у своєму складі готові програмні модулі, призначені для розрахунку та побудови тільки точних ЛАЧХ.

Одним з сучасних пакетів, в якому присутні інструменти аналізу та синтезу САК, є пакет МАТЛАБ [2]. Його особливістю є наявність матричних операцій, можливість роботи з комплексними числами, багатий асортимент логічних функцій та інструментів для побудови і обробки графіків.

Мета роботи. Розробити МАТЛАБ-функцію для розрахунку та побудови АЛАЧХ.

Матеріали і результати досліджень.

Передавальні функції (ПФ) неперервних систем можна представити у двох формах:

1) в поліноміальній (*Transfer Function Polynomial*)

$$W(s) = \frac{H_m(s)}{G_n(s)} = \frac{B_m s^m + B_{m-1} s^{m-1} + \dots + B_1 s + B_0}{A_n s^n + A_{n-1} s^{n-1} + \dots + A_1 s + A_0}, \quad m \leq n; \quad (3)$$

2) у вигляді розкладення поліномів на множники (*Zero-Pole-Gain*)

$$W(s) = K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}, \quad (4)$$

де

$\mathbf{P}=[p_1, p_2, \dots, p_n]$ – вектор полюсів (коренів характеристичного рівняння $G_n(s)=0$);

$\mathbf{Z}=[z_1, z_2, \dots, z_m]$ – вектор нулів системи (коренів рівняння $H_m(s)=0$);

$K=B_m/A_n$.

Алгоритм розв'язання поставленої задачі можна розбити на декілька етапів.

1. Визначення параметрів ПФ (4) \mathbf{P} , \mathbf{Z} і K .

2. Розрахунок кількості нейтральних (нульових) полюсів k_{p0} и нулів k_{z0} , вилучення їх із загального списків та визначення кута нахилу початкової ділянки АЛАЧХ в децибелах/декаду (дБ/дек), враховуючи, що кожна диференційна ланка (кожний нейтральний нуль) змінює цей кут на +20 дБ/дек., а кожна інтегральна ланка (кожний нейтральний полюс) – на -20 дБ/дек:

$$k_{n0}=20(k_{z0}-k_{p0}). \quad (5)$$

3. Визначення амплітуд (частот) ненульових полюсів та нулів, які у сукупності утворюють вектор частот спряження лінійних ділянок АЛАЧХ:

$$\omega_{pi}=|p_i|, \quad \omega_{zj}=|z_j|, \quad (6)$$

$$\mathbf{\Omega}_s=[\omega_{p1}, \omega_{p2}, \dots, \omega_{p,n1}, \omega_{z1}, \omega_{z2}, \dots, \omega_{z,m1}]=[\omega_{s1}, \omega_{s2}, \dots, \omega_{s,m1+n1}], \quad (7)$$

де

$$n_1=n-k_{p0}, \quad m_1=m-k_{z0}. \quad (8)$$

4. Створення відповідного до вектору частот спряження $\mathbf{\Omega}_s$ вектору зміни коефіцієнтів нахилів ділянок АЛАЧХ із n_1 елементів -20 дБ/дек та m_1 елементів +20 дБ/дек:

$$\Delta \mathbf{k}_n=20[-1, -1, \dots, -1, 1, 1, \dots, 1]. \quad (12)$$

5. Сортування векторів $\mathbf{\Omega}_s$ и $\Delta \mathbf{k}$ за зростанням частот спряження.

6. Визначення коефіцієнтів нахилів ділянок АЛАЧХ, що починаються з частоти ω_{si}

$$k_{ni}=k_{n,i-1}+\Delta k_{ni}, \quad i=1, 2, \dots, m1+n1. \quad (13)$$

7. Знаходження у векторі $\mathbf{\Omega}_s$ кратних (однакових) частот, які утворюються при наявності у системі комплексно-спряжених нулів та полюсів, і виключення першої з них.

8. Виключення з вектору коефіцієнтів нахилів \mathbf{k}_n елементів, що відповідають розташуванню виключених кратних частот спряження.

9. Визначення крайніх точок діапазону частот ω_0 та ω_k при побудові АЛАЧХ шляхом округлення десяткових логарифмів від першої частоти спряження до найближчого цілого числа з недоставею, а останньої частоти спряження – до найближчого цілого з надлишком.

10. Формування вектору абсцис табличної АЛАЧХ шляхом доповнення вектору $\mathbf{\Omega}_s$, отриманого після виконання пункту 7, зліва початковою частотою ω_0 , а справа – кінцевою частотою ω_k :

$$\Omega_t = [\omega_0, \Omega_s, \omega_k]. \quad (14)$$

11. Формування вектору нахилів табличної АЛАЧХ за формулою

$$\mathbf{k}_n = [k_{n0}, k_{n1}, \dots, k_{n,end}, k_{n,end}], \quad (15)$$

де *end* – порядковий номер останніх елементів табличної функції.

12. Визначаємо, який коефіцієнт підсилення k_f система мала би при відсутності нейтральних полюсів та нулів (фіктивне підсилення):

$$k_f = K \frac{\prod_{j=1}^{m1} \omega_{zj}}{\prod_{i=1}^{n1} \omega_{pi}}. \quad (9)$$

13. Визначення фіктивної частоти зрізу при наявності нейтральних нулів або полюсів, тобто частоти фіктивного перетину початкової ділянки АЛАЧХ з віссю частот:

$$\omega_{zf} = (k_f)^{-1/k_{n0}}. \quad (10)$$

14. Розраховуємо значення АЛАЧХ L_0 на початковій ділянці для статичної системи ($k_{n0}=0$), для якої значення фіктивного коефіцієнту підсилення збігається з реальним коефіцієнтом підсилення в усталеному режимі

$$1. \quad k = k_f, \quad L_0 = 20 \lg k$$

(11) Розрахунок початкової логарифмічної амплітуди АЛАЧХ при наявності нейтральних нулів або полюсів

$$L_0 = -k_{n0} \lg \frac{\omega_{zf}}{\omega_0}. \quad (16)$$

2. Розрахунок ординат АЛАЧХ в інших вузлах табличної функції:

$$L_i = L_{i-1} + k_{n,i-1} (\lg \omega_i - \lg \omega_{i-1}) = L_{i-1} + k_{n,i-1} \lg \frac{\omega_i}{\omega_{i-1}}, \quad i=1, 2, \dots, end. \quad (17)$$

3. Побудова АЛАЧХ за отриманою таблицею абсцис (логарифмів частот) та ординат (логарифмів амплітуд в децибелах) досліджуваної характеристики).

Наведемо МАТЛАБ-функцію, розроблену за описаним вище алгоритмом.

`function [wBL ,La, wc] = bode_as21 (sys, w0, wk)`

```
[Z, P, K] = zpndata (sys, 'v'); % Визначення нулів та полюсів
wp = abs (P); % Амплітуди (частоти) полюсів
kp = length (P); n = kp; % Кількість полюсів
wz = abs(Z); % Амплітуди (частоти) нулів
kz = length(Z); m = kz % Кількість нулів
```

`% Вилучення із масиву частот нульових (нейтральних) полюсів та нулів:`

`ip0 = find (wp == 0); % Порядкові номери нейтральних нулів та полюсів`

`iz0 = find (wz == 0); % Порядкові номери нейтральних нулів та полюсів`

```

wp (ip0) = []; wz (iz0) = [];
kp0 = length (ip0); kz0 = length (iz0); n1 = n - kp0; m1 = m - kz0;
kn0 = (kz0 - kp0) * 20; % Кількість нейтральних нулів та полюсів

w = [wz', wp']; % Об'єднання частот спряження в один вектор-рядок
dkn = [ones(1, kz-kz0), -ones(1, kp-kp0)]*20; % Визначення зміни нахилів ЛАЧХ на
% кожній частоті

[ws, is] = sort (w); % Сортуння частот спряження за зростанням
dkns = dkn (is); % Перестановка змін нахилів відповідно до перестановки частот
kns = kn0 + cumsum (dkns); % Накопичення нахилів ЛАЧХ зі врахуванням нахилу
% початкової ділянки

% Об'єднання кратних частот
ik = find (diff (ws) ==0);
ws (ik) = [];
kns (ik) = [];

kf = K* prod (wz) / prod (wp); % Фіктивний коефіцієнт підсилення
wf = kf ^ (-20/kn0); % Фіктивна частота зрізу

% Визначення діапазона частот за замовчанням
if nargin ==1 % Якщо діапазон частот не задано користувачем при зверненні до
% функції
wsl = log10(ws); % Логарифми частот спряження
wfl = log10(wf); wl_min = min (wfl, wsl(1));
wl0 = floor(wl_min); wlk=ceil(wsl(end)); % Логарифми початку та кінця діапазону
% частот
w0=10^wl0; wk=10^wlk; % Діапазон частот
end

if kn0 == 0
L0 = 20 * log10 (kf);
else
L0 = - kn0 * log10 (wf / w0);
end

% Формування таблиці для побудови АЛАЧХ:
wt = [w0 ws wk]; % Приєднання до частот спряження граничних частот
wtl = log10 (wt); % Логарифми об'єданого вектору частот
d_wl = diff (wtl); % Різниці між логарифмами сусідніх частот
knt = [kn0 kns kns(end)]; % Приєднання до вектору коефіцієнтів нахилу
% початкового та кінцевого елементів

% Розрахунок ординат АЛАЧХ:
kt = length (wt);
La = zeros (1, kt); La(1) = L0;
for i = 2 : kt
La(i) = La(i-1) + knt (i-1) * d_wl (i-1);
end

```

```

[A, fi, wl] = bode (sys,{w0,wk}); % Розрахунок амплітуд, фаз та частот для побудови
                                     % точних частотних характеристик
A = A(:); fi = fi(:);                % Позбавлення від зайвих індексів
L = 20*log10(A);                      % Розрахунок амплітуди в дБ
figure, semilogx (wl, L), grid on, hold on % Точна ЛАЧХ
semilogx (wt, La, 'LineWidth', 1.5)   % АЛАЧХ
semilogx ([w0,wk], [0 0], 'k')       % вісь частот
for i = 2 : kt-1
    semilogx ([wt(i) wt(i)], [0 La(i)], 'r--', 'LineWidth',1.5) % Проекції точок спряження
                                                                % на вісь частот
end
end

```

Основним формальним вхідним параметром наведеної функції є лінійний неперервний динамічний об'єкт **sys**, який може бути створений за його математичним описом у просторі станів (*State Space*) або у вигляді передавальних функцій (3) або (4).

Наприклад, якщо досліджувана система має ПФ

$$W(s) = \frac{num(s)}{den(s)} = \frac{4(s+1)}{2s^3 + 3s^2 + 5s},$$

то відповідний фактичний вхідний параметр утворюється функцією [3]

```
tf ([4 4], [2 3 5]) linmod
```

У разі, коли досліджувана система має складну структуру і її результуюча ПФ не відома, то об'єкт можна утворити у такий спосіб: розробити *Simulink*-модель системи, вхід та вихід якої необхідно помітити вхідним та вихідним портами, як це показано на рис. 1; зберегти її у файлі; за допомогою функції **linmod** визначити матриці, що визначають математичний опис системи у просторі станів [3]

```
[A, B, C, D] = linmod ('ModelName')
```

та створити об'єкт з довільним ім'ям, наприклад,

```
sys_r = ss (A, B, C, D)
```

Асимптотична та точна ЛАЧХ системи рис.1, отримані при зверненні до розробленої функції користувача у вигляді

```
bode_as21 (sys_r)
```

зображені на рис. 2.

Якщо деякі деталі оформлення отриманих графіків або діапазон частот за замовчанням не задовольняють користувача, то він може отримати результати розрахунку АЛАЧХ в числовому вигляді зверненням

```
[L_t, omega_t] = bode_as21 (sys_r, omega0, omega_k)
```

і скористатися цими результатами на свій смак.

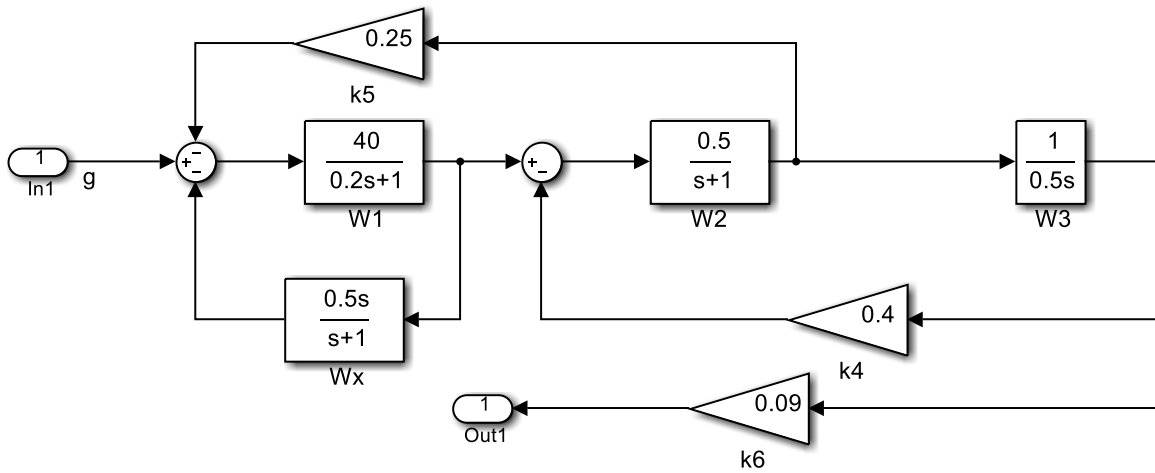


Рисунок 1 – Simulink-модель досліджуваної системи

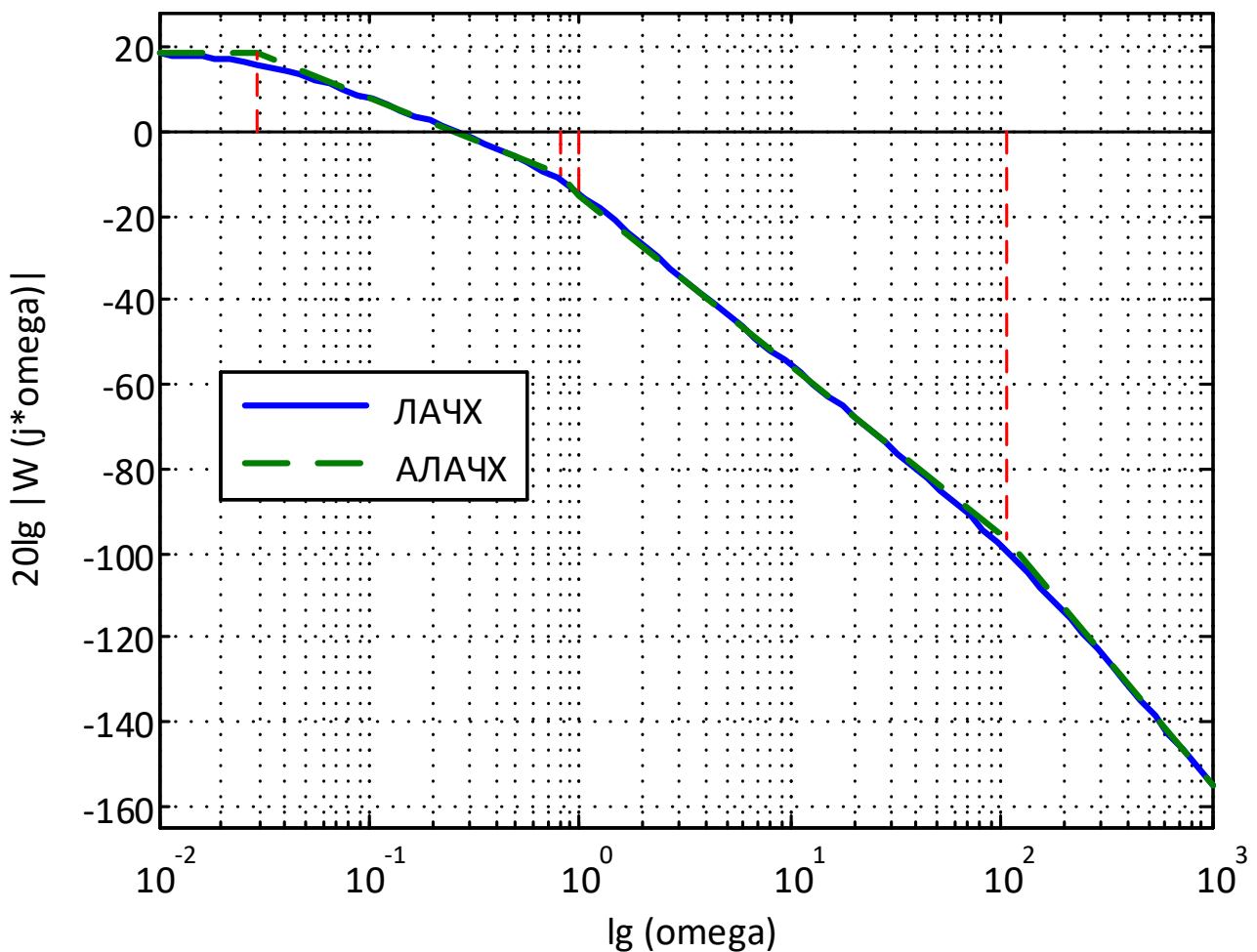


Рисунок 2 – Точна та асимптотична ЛАЧХ системи рис.1

З рис. 2 видно, що асимптотична і точна ЛАЧХ дуже близькі одна до одної, але на АЛАЧХ чітко видно частоти спряження, в кожній з яких коефіцієнт нахилу може змінюватися на ± 20 дБ/дек або на ± 40 дБ/дек. Зокрема АЛАЧХ на рис. 2 починається з ділянки 0 дБ/дек, в області частоти зрізу має протяжну

ділянку з нахилом -20 дБ/дек, а частоти спряження, з яких починаються ділянки АЛАЧХ з від'ємними коефіцієнтами нахилу більшими, ніж -20 дБ/дек, віддалені від частоти зрізу більше, ніж на октаву. Ці показники свідчать про те, що замкнена система, утворена з досліджуваної розімкненої, є статичною за керуванням, стійкою і має монотонну аперіодичну перехідну функцію.

Висновок. У статті теоретично обґрунтовано алгоритм розрахунку асимптотичних логарифмічних амплітудно-частотних характеристик. Запропоновану в даній роботі МАТЛАБ-функцію можна використовувати для розрахунку та побудови асимптотичних ЛАЧХ розімкнених систем, які дають більше інформації для аналізу відповідних замкнених систем.

Перелік посилань

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: підручник. – Київ: Либідь, 2007. – 656 с.
2. Гаєв Є.О., Нестеренко Б.М. Універсальний математичний пакет МАТЛАВ і типові задачі обчислювальної математики. Навчальний посібник.– К.: НАУ, 2004. – 176 с.
3. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1999. – 287 с.