АНАЛІЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ЗА ДОПОМОГОЮ ПСЕВДОЗВОРОТНОЇ МАТРИЦІ

Спінул Л.Ю., к.т.н., доц., Коноплінський М.А., к.т.н., ст. викл.
КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра теоретичної електротехніки
Вещиков Г.В., студент
КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра автоматизації електромеханічних систем та електроприводу

Вступ. Однією із складових функціонування технічної (електричної) системи є діагностика робочого або аварійного режиму її роботи. У разі ускладненого доступу до місць вимірювання неможливо отримати всі необхідні для аналізу дані. Якщо для аналізу системи необхідно складати систему рівнянь, то їх число повинно дорівнювати числу невідомих параметрів об’єкта. Але можуть виникати випадки, коли неможливо виміряти всі змінні і число рівнянь буде меншим кількості невідомих. Одним із шляхів вирішення задачі побудови математичної моделі технічного об’єкта при обмежених експериментальних даних є застосування псевдозворотної матриці [1].

Мета роботи. Дослідження можливості використання псевдозворотної матриці при побудові математичної моделі електричного кола з наперед невідомою структурою або параметрами.

Матеріали і результати досліджень. Якщо матриця A – квадратна невироджена матриця, то для неї існує зворотна матриця A^{-1}. Коли матриця A – це довільна прямокутна mxn матриця рангу r, то до неї існує псевдо зворотна матриця A^{+}, що має певні властивості зворотної. Псевдозворотна матриця знаходиться так [1, 4, 6]:

$$A^{+} = C^{+}B^{+} = C^{T}\left(CC^{T}\right)^{-1}\left(BB^{T}\right)^{-1}B^{T},$$

де матриці B і C, які мають розміри mxr і rxn відповідно, є склетним розкладанням матриці A [2]

$$A = BC = \begin{Vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{Vmatrix}.$$

Рядками матриці C , будуть r лінійно незалежних строк матриці A. Кожна строка матриці B знаходиться з системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1 = B_1 C, \\ A_2 = B_2 C, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = B_n C, \end{cases}$$

де A_i - *i*-та строка матриці A, B_i - *i*-та строка матриці B.

Матрицю B також можна знайти з наступного рівняння

$$B = AC^+,$$

де матриця C^+ є псевдозворотною до C і розраховується так

$$C^+ = C^T \left(CC^T \right)^{-1}.$$

В теорії електричних кіл розрахунок струмів і напруг на елементах кола проводиться за допомогою першого і другого законів Кірхгофа, які дозволяють скласти систему лінійно незалежних рівнянь, у якій число невідомих дорівнює числу рівнянь [5]. Це відомий метод, що набув широкого розповсюдження в теорії електричних кіл і на практиці. Однак, у випадках, коли на практиці неможливо виміряти струми або напруги на окремих ділянках кола у складеній системі число невідомих буде більше числа рівнянь.

Приклад 1. Розглянемо ділянку лінійного електричного кола (рис. 1). Для визначення струмів I_1, I_2, I_3 згідно теорії електричних кіл необхідно скласти систему з трьох рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа (1).

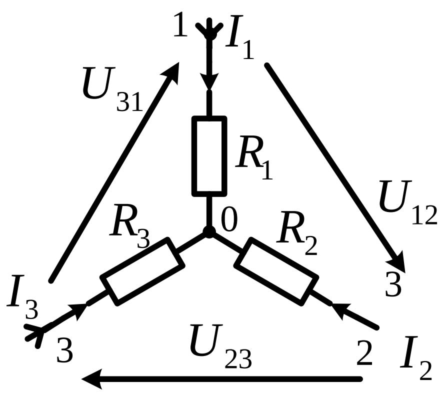

Рисунок 1

$$\begin{cases} 0 = I_1 + I_2 + I_3, \\ U_{12} = I_1 R_1 - I_2 R_2, \\ U_{23} = I_2 R_2 - I_3 R_3. \end{cases} \qquad (1)$$

Якщо на практиці не можливо виміряти обидві напруги, тобто в системі (1) буде відсутнє друге або третє рівняння. Тому для розв’язання системи

$$\begin{cases} 0 = I_1 + I_2 + I_3, \\ U_{23} = I_2 R_2 - I_3 R_3. \end{cases} \tag{2}$$

необхідно застосувати псевдозворотну матрицю. У відповідності з [1] рішення системи буде знаходитись так $[I] = [R]^+ [U]$, де $[R]^+$ - псевдозворотна матриця.

Наприклад, якщо $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $U_{23} = 150$ В, то система рівнянь (3) буде такою

$$\begin{cases} 0 = I_1 + I_2 + I_3, \\ 150 = 5I_2 - 2I_3. \end{cases} \tag{3}$$

або в матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 150 \end{bmatrix}.$$

Псевдо зворотна матриця $[R]^+$ дорівнює

$$[R]^+ = \begin{bmatrix} 0,371 & -0,038 \\ 0,179 & 0,153 \\ 0,448 & -0,115 \end{bmatrix}.$$

Невідомі струми дорівнюють

$$[I] = [R]^+ [U] = \begin{bmatrix} -5,7 \\ 22,95 \\ -17,25 \end{bmatrix}.$$

Отже, матимемо: $I_1 = 5,7 A$, $I_2 = 22,95 A$, $I_3 = 17,25\ A$.

Приклад 2. Розглянемо лінійне електричне коло, схема якого приведена на рис. 2.

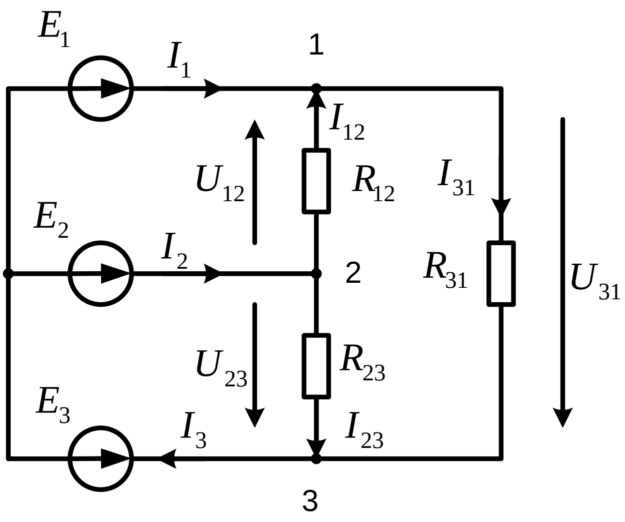

Рисунок 2

У цьому колі опори R_{12}, R_{23}, R_{31} з'єднані зао схемою «трикутника». За результатами вимірювань відомі: струми $I_1 = 4$ А, $I_2 = 2$ А та напруги $U_{12} = 5$ В, $U_{23} = 10$ В, $U_{31} = 5$ В. Необхідно визначити опори R_{12}, R_{23}, R_{31}.

Для знаходження опорів R_{12}, R_{23}, R_{31} скористаємося законом Ома

$$R_{12} = \frac{U_{12}}{I_{12}},\; R_{23} = \frac{U_{23}}{I_{23}},\; R_{31} = \frac{U_{31}}{I_{31}}. \tag{5}$$

Оскільки значення напруг U_{12}, U_{23}, U_{31} відомі, то для знаходження струмів I_{12}, I_{23}, I_{31} записуємо рівняння за першим законом Кірхгофа для вузлів 1 і 2

$$\begin{cases} I_1 = I_{31} - I_{12}, \\ I_2 = I_{12} + I_{23}. \end{cases} \tag{6}$$

Якщо $I_1 = 4$ А, $I_2 = 2$ А, то система (4) буде такою

$$\begin{cases} 4 = I_{31} - I_{12}, \\ 2 = I_{12} + I_{23}. \end{cases}$$

В матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{23} \\ I_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad [A]\square[X] = [B].$$

Невідомі струми I_{12}, I_{23}, I_{31} знаходяться з матричного рівняння $[X] = [A]^{+} \cdot [B]$, де псевдо зворотна матриця $[A]^{+}$ дорівнює

$$[A]^{+} = \begin{bmatrix} -0,333 & 0,333 \\ 0,333 & 0,666 \\ 0,666 & 0,333 \end{bmatrix}.$$

Шукані струми дорівнюють $I_{12} = -0,666\text{А}, I_{23} = 2,664\text{А}, I_{31} = 3,33$ А.
По формулам (5) знаходимо опори R_{12}, R_{23}, R_{31}:

$$R_{12} = \frac{U_{12}}{I_{12}} = \frac{5}{0,666} = 7,5\ \text{Ом},\ \ R_{23} = \frac{U_{23}}{I_{23}} = \frac{10}{2,664} = 3,753\ \text{Ом},$$

$$R_{31} = \frac{U_{31}}{I_{31}} = \frac{5}{3,33} = 1,5\ \text{Ом}.$$

Висновок. Роз’вязання системи рівнянь у якій кількість невідомих більше за число рівнянь можливий за допомогою псевдозворотної матриці. Такий підхід можна використовувати для аналізу лінійних кіл як постійного, так і змінного струму, за умови недостатнього числа експериментальних даних. Величини, знайдені за допомогою псевдозворотної матриці, будуть відрізнятися від дійсних значень. Тому запропонований підхід може бути використаний на початковому етапі аналізу електричного кола і потребує подальшого удосконалення.

Перелік посилань

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц, М.: Наука.-1988.
2. Мальцев А.И. Основи линейной алгебры. /А.И.Мальцев//М.:Наука, 1998. – 362с.
3. E. H. Moore: On the reciprocal of the general algebraic matrix. Bulletin of the American Mathematical Society 26, 394-395 (1920) http://www.ams.org/bull/1920-26-09/S0002-9904-1920-03322-7/S0002-9904-1920-03322-7.pdf
4. Пенроуз Роджер: A generalized inverse for matrices. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 51, 406-413 (1955)
5. Теоретичні основи електротехніки, т.1. Під редакцією І.М. Чиженка, В.С. Бойка.– К.: «Політехніка», 2014.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ, М.: Мир.-1988. С. 356-361