СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ СТАБІЛІЗАЦІЇ ЗВОРОТНОГО МАЯТНИКА

Божок О.В., студент, Димко С.С., к.т.н., старший викладач
КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра автоматизації електромеханічних систем та електроприводу

Вступ. Задача стабілізації положення зворотного маятника являє собою класичну задачу динаміки в теорії керування. Вона дозволяє наглядно продемонструвати, як за рахунок керування об'єктом можна забезпечити стійкість для нестійкого положення рівноваги і досить часто використовується в навчальному процесі для ознайомлення з різними методами керування та дослідження їх властивостей при керуванні подібними системами.

В літературі представлено різні методи керування, що вирішують задачу стабілізації положення зворотного маятника, такі як: класичні методи керування (ПІД регулятор, система модального керування (зі зворотним зв'язком за повним вектором стану), а також методи засновані на використанні нейронних мереж.

Мета роботи. Виконати огляд існуючих методів керування, що використовуються при стабілізації положення зворотного маятника.

Матеріали дослідження. Зворотний маятник являє собою маятник закріплений на рухомій платформі, як це зображено на рис. 1. Задача стабілізації положення зворотного маятника полягає у керуванні рухомою платформою таким чином, щоб нестійке положення маятника з вантажем у верхній точці стало стійким. Тобто у забезпеченні значення $\theta = 0$ та підтриманні його в такому положенні.

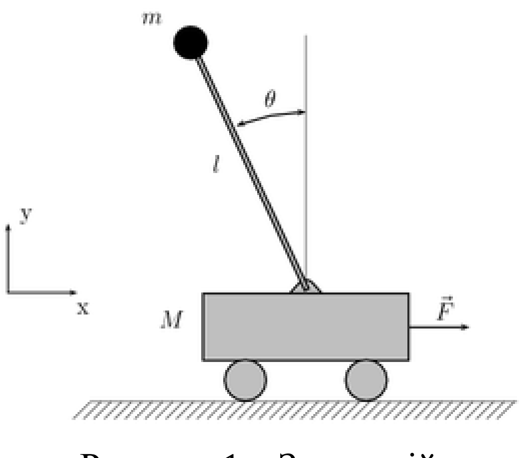

Рисунок 1 – Зворотній маятник
де M – маса рухомої платформи, m – маса маятника, l – довжина маятника, θ – кутове положення маятника, F – сила прикладена до рухомої платформи

Рівняння динаміки руху зворотного маятника складаються на основі рівнянь Ейлера-Лагранжа 2-го роду. Результуюча система, що описує динаміку зворотного маятника має наступний вигляд [1]:

$$\begin{aligned}&(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta=F\\&(I+ml^2)\ddot{\theta}+f_\theta\dot{\theta}-mgl\sin\theta=-ml\ddot{x}\cos\theta\end{aligned}\qquad(1)$$

де I – момент інерції маятника, b – коефіцієнт тертя при русі рухомої платформи, f_θ – коефіцієнт тертя в точці з'єднання обертальної частини маятника.

Рівняння (1) представляють собою систему нелінійних диференційних рівнянь розв'язок яких за допомогою класичних методів теорії автоматичного керування є неможливим. Для вирішення задачі стабілізації кутового положення зворотного маятника систему нелінійних диференційних рівнянь (1) лінеаризують в околі робочої точки, тобто в околі точки $\theta=0$ [2]. Відомо, що для малих значень θ справедливим є наступне твердження:

$$\sin\theta=\theta,\ \cos\theta=1\qquad(2)$$

Оскільки швидкість зміни кутового положення маятника в режимі стабілізації суттєво змінюється досить повільно, можемо вважати, що нелінійні компоненти $\dot{\theta}^2=0$. Таким чином система рівнянь (1) при лінеаризації набуває такого вигляду [3]:

$$(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}+ml\ddot{\theta}=F\qquad(3)$$

$$(I+ml^2)\ddot{\theta}+f_\theta\dot{\theta}-mgl\theta=-ml\ddot{x}\qquad(4)$$

Зазвичай при синтезі регуляторів в теорії керування систему рівнянь такого типу представляють у просторі стану [1], які виглядають таким чином:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}&=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}\\\boldsymbol{y}&=\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{Du}\end{aligned}\qquad(5)$$

Нехай $u=F,\ x_1=\theta,\ x_2=\dot{\theta}=\dot{x}_1,\ x_3=x,\ x_4=\dot{x}=\dot{x}_3,\ y_1=x,\ y_2=\theta$, тоді рівняння стану системи (3)–(4) будуть представленні в вигляді (5) з заміною $q=I(M+m)+Mml^2$.

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\\frac{mgl(M+m)}{q}&\frac{f_\theta}{q}&0&\frac{mlb}{q}\\0&0&0&1\\\frac{-gm^2l^2}{q}&\frac{-f_\theta ml}{q}&0&\frac{-b(l+ml^2)}{q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-\frac{ml}{q}\\0\\\frac{l+ml^2}{q}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\qquad(6)$$

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\qquad(7)$$

де $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 & \dot{x}_4 \end{bmatrix}^T$, $\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{bmatrix}^T$.

Вирішення вищезазначеної задачі найчастіше здійснюють при використанні наступних методів керування: система модального керування – лінійно-квадратичний регулятор (linear quadratic regulator – LQR)), система з ПІД регуляторами кутового положення маятника та лінійного положення рухомої платформи, керування на основі нейронних мереж, генетичні алгоритми керування та ряд інших.

Лінійно-квадратичний регулятор – в теорії керування, це один з видів оптимального керування, який використовує квадратичний функціонал якості. Використовується для неперервних лінійних систем $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}$ з критерієм оптимальності

$$J = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Qx} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{Ru}) dt \tag{8}$$

де $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Qx}$, $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Ru}$ – величини квадратів змінних стану.

За допомогою програмного середовища Matlab при використанні функції lqr(A,B,Q,R) маємо змогу розрахувати оптимальні коефіцієнти зворотних зв’язків. $\boldsymbol{Q}$ та $\boldsymbol{R}$ – це матриці вагових коефіцієнтів, що використовуються для штрафування системи або керуючих сигналів. Для даної системи обирається додатновизначена матриця $\boldsymbol{Q}$ розмірністю $[4 \times 4]$. Додатно визначена матриця $\boldsymbol{R}$ для даної системи вироджується у скаляр, оскільки присутній лише один керуючий сигнал.

Переваги цього регулятора полягають в тому, що його синтез передбачає знаходження оптимальних значень підсилення зворотних зв’язків для даної системи (тому є й найбільш популярним). Недоліком є наявність в системі незгасаючих коливань в наслідок інерційності рухомої платформи, оскільки в системі відсутні інтегральні складові.

Іншим підходом у вирішенні задачі стабілізації кутового положення зворотного маятника є використання подвійного контуру керування з ПІД регуляторами зі зворотними зв’язками по положенню рухомої платформи та кутовому положенню маятника.

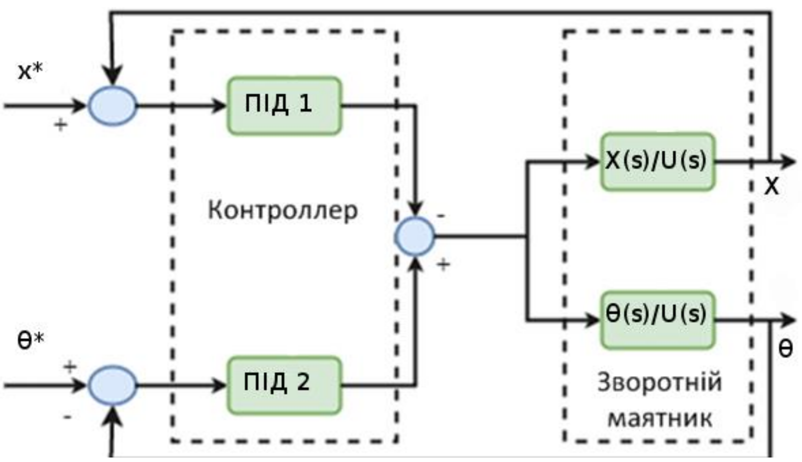

Рисунок 2 – Система подвійного циклу ПІД регуляторів

Структурну схему такої системи зображено на рис. 2.

Головною перевагою такого підходу є відсутність незгасаючих коливань в системі. Однак через відсутність методики вибору коефіцієнтів ПІД регуляторів та їх налаштування, реалізація керування за таким підходом суттєво ускладняються.

Ще одним популярним методом вирішення задачі є використання систем на основі нейронних мереж, які можуть використовуватись для представлення нелінійного відображення «вхід-вихід» та для реалізації нелінійного контролера. Таким чином використання нейронного керування використовується лише для покращення характеристик керування [4].

Останнім часом набувають розповсюдження так звані методи машинного навчання. Це ітераційні алгоритми які крок за кроком наближаються до оптимального значення коефіцієнтів. Під час кожної ітерації функція винагороди оцінює на скільки добре алгоритм впорався з поставленим завданням та порівнюється з наступним кроком. Найбільш швидкі алгоритми машинного навчання для системи зворотного маятника:

- алгоритм сходження на вершину, в якому постійно відбувається переміщення в сусідній стан більшої винагороди до досягнення максимуму, або локального максимуму (що є недоліком);
- алгоритм випадкового пошуку – під час кожної ітерації коефіцієнти змінюються випадково в певних межах, а потім обираються найкращі (перевагою є можливість перескочити значення локального максимуму);
- алгоритм навчання з підкріпленням – на основі отриманої від середовища винагороди формується функція корисності, що дає йому можливість обирати стратегію поведінки, не випадково, а враховуючи досвід взаємодії з середовищем (недоліком є то, що потрібно спочатку необхідно набрати певну статистику для формування функції корисності).

Алгоритми випадкового пошуку та сходження на вершину мають значну перевагу при використанні в простих системах оскільки починають рухатись до оптимального значення відразу, але якщо система більш складна, то алгоритми з статистичним аналізом проявляють себе значно краще.

Висновки. На основі проведеного аналізу найпоширеніших методів вирішення задачі стабілізації кутового положення зворотного маятника було визначено переваги та недоліки існуючих методів керування, що дозволить в при подальшій розробці лабораторного стенду вибрати оптимальні методи керування для демонстрації основних властивостей студентам при виконанні ними лабораторних робіт.

Перелік посилань

1. Kumar P. Controller design of inverted pendulum using pole placement and LQR / P. Kumar, O. Mehrotra, J. Mahto // International JournalOf Research in Engineering and Technology (IJRET). – 2012. – Vol 1. – C. 532–538.
2. Chen C.-T. Linear system theory and design / C.-T. Chen. – Oxford University Press, Inc., 1995.
3. Chen C.-T. Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods / C.-T. Chen. – Oxford University Press, Inc., 1995.
4. Омату С. Нейроуправление и его приложения. Кн. 2/Общ. ред. АИ Галушкина / С. Омату, М. Халид, Р. Юсоф // М.: ИРПЖР. – 2000.