ОПТИМІЗАЦІЯ РЕАКТИВНИХ ПОТУЖНОСТЕЙ ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖ МЕТОДАМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Прилипко Д.Ю., магістрант, Банін М.Д., ст. викл.
КПІ ім. Ігоря Сікорського, кафедра автоматизації енергосистем

Вступ. Оптимізація втрат активної потужності і електроенергії завжди буде актуальною в електроенергетиці України для електричних мереж всіх рівнів: 750/330/220 кВ електроенергетичних систем, 110(150)/35/10(6)/0.4 кВ електропередавальних організацій і технологічних мереж потужних споживачів. Однією з таких задач є оптимізація реактивних потужностей. Математичний апарат цієї задачі, як правило, базується на варіаціях методу градієнтного спуску з урахуванням технологічних обмежень за реактивною потужністю і напругою. Ці методи отримали назву методів першого порядку, оскільки математично використовують перші похідні від цільової функції (вектор градієнтів). Представляє інтерес реалізація задачі оптимізації реактивних потужностей методом другого порядку з використанням матриці Гесе.

Мета роботи. Необхідно реалізувати математичний апарат методу другого порядку і порівняти його показники збіжності і швидкодії з рядом градієнтних методів оптимізації, що реалізовані в програмному комплексі РАОТВ (розрахунок, аналіз, оптимізація технологічних втрат) [1]. Задача пошуку екстремуму цільової функції багатьох змінних базуються на розкладанні цієї функції у ряд Тейлора в навколо точки простору *x*:

$$F(x+\Delta x) = F(x) + \overline{\Delta x} * g + \frac{1}{2}\overline{\Delta x} * G * \Delta x,$$

де $F(x)$ − функція багатьох змінних x_1, x_2, x_3;

$\Delta x, \overline{\Delta x}$ − вектор-стовпець і вектор-рядок приростів $x_1, x_2, \dots, x_n$;

g − вектор стовпець перших похідних (градієнтів) функції $F(x)$;

G − матриця других похідних функції $F(x)$ або матриця Гесе.

Для функцій багатьох змінних, як правило, розкладання у ряд Тейлора обмежується першими або другими похідними:

$$F(x+\Delta x) \approx F(x) + \overline{\Delta x} * g \tag{1}$$

$$F(x+\Delta x) \approx F(x) + \overline{\Delta x} * g + \frac{1}{2}\overline{\Delta x} * G * \Delta x \tag{2}$$

Вираз (1) прийнято називати лінійною апроксимацією функції $F(x)$, що використовується в методах першого порядку, а вираз (2) – квадратичною апроксимацією, що лежить в основі методу другого порядку. Формули розрахунків похідних першого і другого порядку розраховуються за формулами кінцево-різностної апроксимації [2]:

$$g_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{F(x+\Delta x_i) - F(x-\Delta x_i)}{2\Delta x_i},\ G_{ii} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \frac{F(x+\Delta x_i) - F(x-\Delta x_i) - 2F(x)}{\Delta x_i^2} \tag{3}$$

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{F(x+\Delta x_i+\Delta x_j) - F(x+\Delta x_i) - \Delta x_j * g_j - \Delta x_j^2 G_{ii}/2}{\Delta x_i \Delta x_j} \tag{4}$$

Градієнтний метод спуску реалізує рекурентну залежність з використанням вектору перших похідних:

$$x_i^{(t+1)} = x_i^{(t)} + \lambda_i^{(t)} * g_i^{(t)}, \qquad (5)$$

де $x_i^{(t)}, x_i^{(t+1)}$ – значення координат на t-му та t+1 кроці спуску;

$\lambda_i^{(t)}$ – коефіцієнт кроку для i-тої коордтинати;

$g_i^{(t)}$ – градієнт i-тої координати на t-му кроці.

Процес може закінчуватись за умови $g_{max} < \varepsilon$, або $\left|F^{(t+1)} - F^{(t)}\right| < \varepsilon$. Напрям вектору-градієнту не завжди є оптимальним з точки зору швидкості досягнення мінімуму, тому вираз (5) в загальному випадку записують як: $x_i^{(t+1)} = x_i^{(t)} + \lambda_i^{(t)} * p_i^{(t)}$, де p_i – вектор напряму спуску.

Таким чином у градієнтних методах спуску необхідно на кожному кроці визначатись з напрямом і величиною кроку.

Метод найскорішого спуску в якості напрямку обирає вектор градієнт і на кожному кроці виконує одновимірний пошук мінімуму. Для знаходження такого мінімуму у функціях близьких до квадратичних можна запропонувати апроксимацію одновимірної функції параболою за трьома точками: $x,\ x+g,\ x-g$. Для параболічної функції $f(x) = C + Bx + Ax^2$ точка мінімуму визначається виразом $x_{min} = -\frac{B}{2A}$. За наявності трьох точок $F(x), F(x+g), F(x-g)$ точка мінімуму визначається виразом: $x_{min} = \left[-\frac{F(x-g)-F(x+g)}{2(F(x+g)-2F(x)+F(x+g))}\right] * g$, тобто на кожному кроці спуску реалізується вираз: $x^{(t+1)} = x_{min}^{(t)}$.

Метод найскорішого спуску відноситься до методу першого порядку, оскільки розраховуються похідні першого порядку (вектор градієнтів).

Метод спряжених градієнтів базується на методі спряжених напрямків, що використовується для рішення лінійних систем рівнянь з симетричною матрицею, але застосовується для рішення ліненеаризованих нелінійних систем рівнянь. Перший крок методу співпадає з методом найскорішого спуску, тобто виконується крок в точку оптимуму за напрямом вектору-градієнта. Наступні кроки визначаються формулами:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} + \lambda * p^{(t)}, p^{(t)} = -g^{(t)} + \omega * p^{(t-1)}, \omega = \frac{\sum g_i^{2\,(t)}}{\sum g_i^{2\,(t-1)}} \qquad (6)$$

Значення λ на кожному кроці у формулі (6) визначається одновимірною оптимізацією у напрямі $p^{(t)}$. Метод спряжених градієнтів відноситься до методів першого порядку.

Метод спрощення матриці Гесе [3], [4] полягає в тому, що на кожному кроці спуску виконується одновимірна оптимізація за кожною координатою квадратичною апроксимацією за трьома точками: $F(x),\ F(x+\Delta x_i), F(x-\Delta x_i)$. Координата мінімуму знаходиться за формулою:

$$x_{i\,min} = -\frac{(F(x+\Delta x_i)-F(x-\Delta x_i)*)\,\Delta x_i}{2(F(x+\Delta x_i)-2\mathrm{F}(\mathrm{x})+F(x-\Delta x_i))} \qquad (7)$$

При цьому напрям руху визначається вектором $\bar{x}_{i\,min}$. Метод отримав назву спрощення матриці Гесе, оскільки вираз (7) можна представити формулами (3): $x_{i\,min} = -\frac{g_i}{G_{ii}}$, тобто замість повної матриці Гесе використовуються тільки її діагональні елементи. За напрямом $\bar{x}_{i\,min}$ також можна виконати одновимірну оптимізацію. Метод можна віднести до методів другого порядку, оскільки розраховуються діагональні елементи матриці Гесе.

Метод Ньютона полягає в апроксимації цільової функції квадратичною формою (2). Матриця Гесе може розраховуватись на кожному кроці за формулами (3), (4). За виразом (2) необхідно визначити такий крок Δx при якому на кожному t-му кроці досягається мінімум $F(x+\Delta x)$. Продиференціювавши вираз (2) і прирівнявши часткові похідні нулю, отримаємо систему рівнянь: $g + G * \Delta x = 0$, звідки знаходимо оптимальний крок $\Delta x = -G^{-1} * g$, тобто на кожному кроці знаходиться новий вектор $x^{(t+1)} = x^{(t)} + \Delta x^{(t)}$.

Метод Ньютона відносять до методів другого порядку, оскільки на кожному кроці розраховуються часткові похідні другого порядку.

Матеріали і результати досліджень. Порівняння методів було здійснено на промисловій схемі 750/330/110 кВ Центральної електроенергетичної системи (ЦЕС), яка здійснює централізоване електропостачання Житомирської, Київської, Чернігівської та Черкаської областей та м. Київ на території площею 110,7 тис. кв. км. Розрахункова схема ЦЕС складається з 649 вузлів, 715 гілок та 67 контурів.

```
Потребление             :     2054.200 МВт     1782.500 МВАр
Генерация               :    -2203.726 МВт     -962.064 МВАр
Балансная мощность      :        0.000 МВт       -0.000 МВАр
Потери в схеме          :      149.526 МВт     -820.436 МВАр
  Нагрузочные потери    :      133.931 МВт     1103.247 МВАр
    от актив.перетоков  :      121.988 МВт
    от реакт.перетоков  :       11.942 МВт
Потери холост.хода      :       15.596 МВт    -1923.683 МВАр
    шунтирующие реакт.  :        3.741 МВт     1173.035 МВАр
    конденсатор. уст.   :        0.000 МВт        0.000 МВАр
Небаланс в схеме        :        0.000 МВт       -0.000 МВАр
```

Рисунок 1 – Загальні характеристики розрахунку режиму в комплексі РАОТВ

Слід зазначити, що втрати від перетікань реактивної потужності складають 11.942 МВт, тобто 8% від сумарних втрат – 149.526 МВт.

Для оптимізації реактивних потужностей обрано 22 вузла 110 і 150 кВ за критерієм максимальних градієнтів. Оптимізацію виконано з точністю 10^{-8} без обмежень за напругою методом спряжених градієнтів, методом спрощення матриці Гесе і методом Ньютона. Отримано однакові результати оптимізації – зменшення втрат до 141.865 МВт, тобто на 7.661 МВт. Графіки збіжності для різних методів оптимізації, час розрахунку і кількість ітерацій (ki) показано на рис. 1.

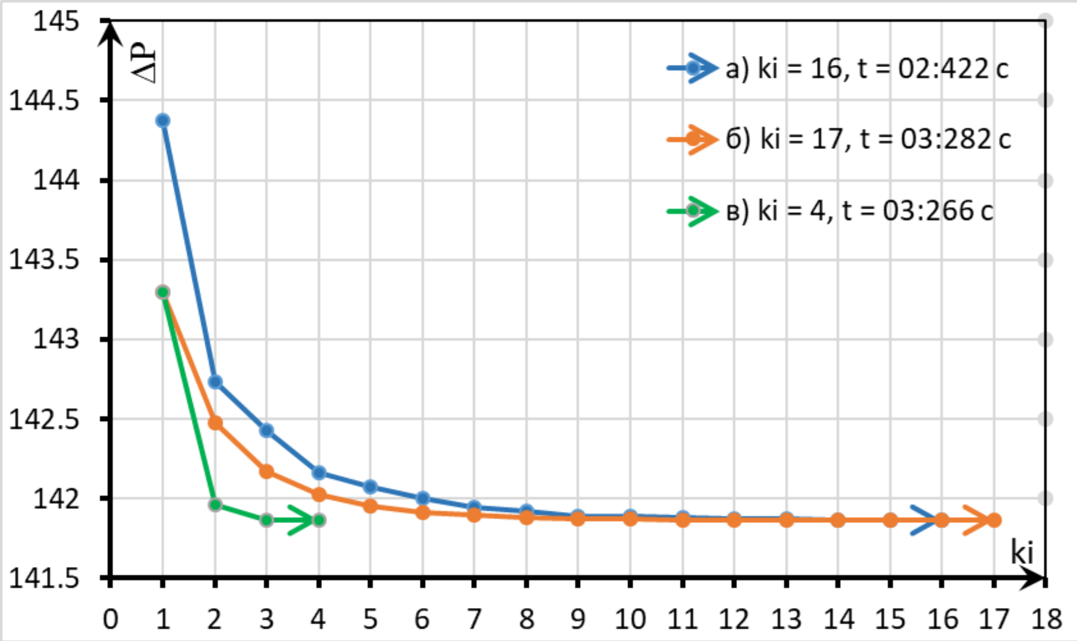

Рисунок 2 – Графіки збіжності методів оптимізації: а) - метод спряжених градієнтів; б) - метод спрощення матриці Гесе; в) - Метод Ньютона.

Висновки. В статті розглянуто математичну базу методів першого порядку: метод найскорішого спуску, метод спряжених градієнтів і методів другого порядку: метод Ньютона і метод спрощення матриці Гесе. Виконано порівняльні розрахунки оптимізації реактивних потужностей розрахункової схеми 750/330/110 кВ Центральної ЕС за всіма наведеними методами. Слід зазначити, що метод спряжених градієнтів і метод спрощення матриці Гесе є більш швидкодіючими, ніж метод Ньютона приблизно в 1.4 рази, але метод Ньютона збігається за меншу кількість ітерацій ніж вказані вище методи. Метод Ньютона не є більш швидкодіючим за методи спряжених градієнтів та метод спрощення матриці Гесе, але представляє інтерес для програмної реалізації і може мати кращу збіжність у складних режимах.

Перелік посилань

1. Банін Д.Б., Банін М.Д., Луців П.Д. Розрахунок та пофідерний аналіз складових технологічних витрат електроенергії в мережах 10(6)/0.4 кВ ВАТ "ЕК "Хмельницькобленерго" за допомогою програмного комплексу РАОТВ // Электрические сети и системы.-2010. Спецвипуск "ВАТ "ЕК Хмельницькобленерго" 15 років", с.46-67.

2. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.. ; пер. с англ. Лебедев В.Ю. – М.: Мир, 1985. – 509 с.

3. Банін Д.Б. Конспект лекцій з дисципліни «Алгоритмізація та програмування електроенергетичних задач» / Банін Д.Б., Банін М.Д., Гнатовський А.В. – К. : НТУУ «КПІ», 2013. – 140 с.

4. Банін Д. Б. Методичні вказівки до викон. диплом. проекту бакалавра для студ. напряму підготов. 6.050701 «Електротехніка та електротехнології». Моделювання, аналіз та оптимізація електричних режимів / Банін Д.Б., Хоменко О.В., Банін М.Д. – Київ. : НТУУ «КПІ», 2011. – 68 с.